M2542

Biblioteca „ASTRA"
— SIBIU —

BIBLIOTECA „ASOCIAȚIUNEA" SIBIU

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIȚII

ANUL I. No. 1 — 1 OCTOMVRIE 1934

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Adresa: Lt.-Comandor GR. ZAPAN

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviței 158. — București 2

0 - MAR 2014

22

CUVÂNT ÎNAINTE

Sunt *patruzeci de ani* de când cinci ingineri, absolvenți ai fostei Școale Naționale de Poduri și Sosele din București, — printre care mă aflam și eu, — au luat inițiativa publicării unei Reviste de matematici. Ajutați de alte cinci persoane, au început publicarea revistei: *„Gazeta Matematică"*, căreia în urmă i-au dat sprijinul profesori de matematici, ingineri și ofițeri de arme speciale. Primul număr a apărut la 15 Septemvrie 1895, iar de atunci apare continuu, fără întrerupere chiar pe timpul războiului.

Primele rânduri din prima pagină a primului număr începe astfel:

„Scopul acestei reviste este: 1) Publicarea de articole originale de matematici; 2) Desvoltarea gustului pentru studiul acestei științe și al cercetărilor originale".

Gazeta Matematică a urmărit cu perseverență aceste realizări și și-a atins cu îndestulare scopul urmărit.

In ultimii ani însă, din cauza reducerii excesive a programului de cunoștințe matematice și științifice în Liceele noastre, profesorii, examinatorii și membrii Societății *Gazeta Matematică* au constatat că fruntașilor din Liceele noastre nu le mai plac matematicile! Din toate părțile țării ni se spune că *Gazeta Matematică* le-a devenit inaccesibilă! Culmile dealurilor pe care ea plimbă matematica sunt prea înalte pentru elevi, sunt chiar invizibile, din profunzimea enormă a văilor în care s'au vârît matematicile în învățământul nostru secundar!

74320

De aci strigăte din toată țara: *„Scoborîți Gazeta Matematică la nivelul actual al învățământului ei în liceele noastre!“* Noi, bătrânii dela această Revistă ne-am opus. Nu este ușor lucru ca după 39 de ani de sacrificii continui, de muncă enormă acumulată în această Revistă, să o prăbușim, — dela înălțimea la care am ridicat-o, și de la care este admirată în toată lumea matematică, — în valea ignoranței. De aceia doritorilor de denivelare, de scoborîre, de prăbușire le răspundeam: *„Ridicați nivelul învățământului matematicilor în Licee, dacă nu acolo unde îl ridicase* SPIRU HARET, *cel puțin acolo unde se găsea acum 100 de ani, sau dați altă soluție“*.

Și atunci s'a început căutarea de soluții. S'a creiat *Asociațiunea Profesorilor de Matematici,* care a discutat chestiunea și a cerut energic autorităților școlare schimbarea programelor de matematici și sporirea numărului anilor și orelor de predare. Profesorii de matematici din Societatea *Gazeta Matematică* au găsit o altă soluție și anume publicarea acestui *„Supliment“* cu exerciții. Prin el, din fundul văilor de care am vorbit, se deschide o potecă pe coastele și slemnele dealurilor până pela un platou dela care să se poată vedea splendoarea matematicilor de pe culmile și vârfurile pe care le-a ridicat și le conduce *Gazeta Matematică.* Pe această potecă pot încerca să se urce tinerii doritori de a îmbrățișa în viața lor ocupațiuni în legătură cu științele exacte, cu ingineria, sau cu științe speciale militare. Pe aceste poteci își propun să-i conducă profesorii de matematici din Societatea *Gazeta Matematică;* îi vor conduce de sigur și profesorii care se interesează de propășirea matematicilor la noi în țară. In *„Supliment“* se vor pune exerciții ușoare și corespunzătoare cu materiile care se predau în Licee în diferitele luni ale Anului. La fiecare chestiune se va publica numele celor ce au trimis soluțiuni bune, fără a se da și soluțiuni, afară de cazul acelora ce ar avea puțini rezolvitori, sau nici unul, și la care se va da indicațiuni de rezolvare. Rezultatele se vor da cel mai târziu după 2 — 3 numere. *„Suplimentul“* va apare la 1 ale lunilor Octomvrie-Iunie, cât durează Școala, în coprins de 8 pagini, fără copertă pentru a reveni la un preț cât mai redus și să fie astfel cât mai ușor accesibil.

Gazeta Matematică face un nou sacrificiu pentru propășirea matematicilor în țara noastră. Profesorii și tinerii licențiați în mate-

matici din Societatea *Gazeta Matematică,* își iau o nouă sarcină de a primi și cerceta soluțiunile primite, de a redija manuscrisele și a tipări *„Suplimentul"*. De munca lor de azi dezinteresată vor profita viitorii matematiciani, profesori, ingineri și ofițeri. Recunoștința viitoare a acestora este singura răsplată a muncii lor pusă în serviciul științei române.

Noi, întemeietorii *Gazetei Matematice,* le urăm perseverență și răbdare, căci cu aceasta succesul le va fi asigurat.

I. IONESCU.

EXERCIȚII PROPUSE

Clasa IV-a. *Exerc. 1.* Să se calculeze suma

$$\frac{5040}{576}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\frac{720}{36}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{120}{8}\left(1+\frac{1}{2}\right)-\frac{24}{6}.$$

G. T. G.

E. 2. Să se calculeze expresiunea

$$E=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}-\frac{1}{1+\frac{1}{5}}.$$

G. T. G.

E. 3. Să se găsească valoarea expresiunii

$$E=\frac{\frac{1}{2}}{a+\frac{1}{3}}+\frac{\frac{1}{3}}{a+\frac{1}{4}}-\frac{\frac{1}{4}}{a+\frac{1}{5}}$$

pentru $a=2$.

G. T. G.

E. 4. Să se calculeze latura octogonului înscris într'un cerc de rază $R=3m$, cu aproximație de 0,01.

G. T. G.

74320

E. 5. Să se verifice egalitatea

$$\frac{\frac{720}{225}+\frac{225}{720}}{\frac{720}{225}-\frac{225}{720}}\times\left(1-\frac{50}{281}\right)=\frac{\left(\frac{675}{540}+\frac{540}{675}\right)\left(\frac{675}{540}-\frac{540}{675}\right)}{1-\frac{31}{400}}.$$

C. I. B.

E. 6. Să se afle un număr știind că

$$\frac{2}{3}\text{ din }\frac{3}{5}\text{ din }\frac{5}{8}\text{ din }\frac{8}{27}\text{ din }\frac{27}{5}\text{ din el este 40.}$$

C. I. B.

E. 7. Să se simplifice fracțiunea

$$\frac{x^4-(a^2+b^2)\,x^2+a^2b^2}{x^2+(a+b)\,x+ab}.$$

C. I. B.

E. 8. Unitatea de măsură fiind cât un centimetru, să se construiască exact un segment egal cu:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}.$$

O. N. Ț.

E. 9. Pe o axă $x'x$ se înseamnă un punct O (origine). Să se măsoare pe axă segmentele:

$$\overline{OM}=+2+\sqrt{5}\ ;\ \overline{ON}=+2-\sqrt{7}\ ;\ \overline{OP}=+\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5};$$

unitatea de măsură fiind cât 0,5 cm.

O. N. Ț.

Clasa V-a. *Exerc. 1.* Să se rezolve sistemul

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}\\[2ex] x-y-1=\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}\end{cases}.$$

G. T. G.

E. 2. Să se rezolve ecuațiunea

$$(x+2)(x+3)+(x+3)(x+4)+(x+4)(x+5)=3x(x+1).$$

G. T. G.

E. 3. Să se determine m, n, p astfel ca polinomul

$$P(x) \equiv x^4 + 5x^3 + mx^2 + nx + p$$

să se împartă exact cu

$$Q(x) \equiv x^3 + 2x^2 + 3x + 4,$$

şi în acest caz, să se afle câtul.

C. I. B.

E. 4. Să se determine coeficienţii m, n, p astfel ca polinomul

$$P(x) \equiv x^5 + 4x^4 + 7x^3 + mx^2 + nx + p$$

să fie divizibil cu produsul $(x - 1)(x + 1)(x + 2)$.

A. A. R.

E. 5. Să se găsească relaţia dintre coeficienţii polinomului

$$P(x) \equiv ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

astfel ca polinomul să fie divizibil cu $x^2 - 1$.

A. A. R.

E. 6. Să se verifice identitatea:

$$3a^4 - (a^2 - c^2)^2 - c^2(2a - c)^2 \equiv 2a^2(a^2 - c^2) + 2a^2c(2a - c) - 2c(2a - c)(a^2 - c^2).$$

N. B.

E. 7. Să se verifice identitatea

$$ab(c-k)^3(a-b) + bc(a-k)^3(b-c) + ca(b-k)^3(c-a) \equiv (a - b)(b - c)(c - a)(k^3 - abc).$$

N. B.

E. 8. Să se verifice identitatea

$$\left(\frac{k}{a} - \frac{a}{k}\right)\left(\frac{k}{b} - \frac{b}{k}\right)\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{k}{b} - \frac{b}{k}\right)\left(\frac{k}{c} - \frac{c}{k}\right)\left(\frac{b}{c} - \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{k}{c} - \frac{c}{k}\right)\left(\frac{k}{a} - \frac{a}{k}\right)\left(\frac{c}{a} - \frac{a}{c}\right) \equiv \left(\frac{b}{a} - \frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{b} - \frac{b}{c}\right)\left(\frac{a}{c} - \frac{c}{a}\right)$$

N. B.

E. 9. Să se arate că

$$a^4 + b^4 + c^4 \equiv (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(ab + ac + bc)^2 + 4abc(a + b + c).$$

A. A. R.

Clasa VI. *Exerc. 1.* Să se rezolve grafic sistemul:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 16 \\ 3x + 7y = 1. \end{cases}$$

G. T. G.

E. 2. Produsul a patru numere în progresie aritmetică mărit cu a patra putere a raţiei este un pătrat perfect.

N. B.

E. 3. Să se arate că fiecare din rădăcinile ecuaţiei $x^2+x+1=0$ este patratul celeilalte.

G. T. G.

E. 4. Să se demonstreze identitatea

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} \equiv \sqrt{6}.$$

G. T. G.

E. 5. Fie x_1 şi x_2 rădăcinile ecuaţiunei

$$x^2 + px + q = 0.$$

Care este legătura dintre p şi q ca să avem: $x_1^2 = x_2$.

G. T. G.

E. 6. Să se calculeze suma:

$$1 + 11 + 101 + 1001 + \ldots + (10^n + 1).$$

G. T. G.

E. 7. Fie x_1 şi x_2; x'_1 şi x'_2 respectiv rădăcinile ecuaţiunilor

$$x^2 + px + q = 0 \; ; \; x^2 + p'x + q' = 0.$$

Să se formeze ecuaţiunea în y având rădăcinile:

$$y_1 = x_1x'_1 \; , \; y_2 = x_2x'_2$$

N. B.

E. 8. Să se găsească forma generală a ecuaţiunilor de gradul al doilea, care admit numărul 2 ca rădăcină.

O. N. Ţ.

E. 9. p, q fiind coordonatele unui punct în raport cu două axe perpendiculare OP, OQ, să se linieze porţiunea planului POQ astfel ca pentru orice punct al ei ecuaţiunea

$$x^2 + px + q = 0$$

să aibă rădăcinile cuprinse între 1 şi 2.

Ce putem spune pentru punctele depe frontiera porţiunii de plan?

O. N. Ţ.

Clasa VII-a. *Exerc. 1.* Se cere limita sumei

$$\left[\frac{1}{a+1}+\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+1)^3}+\ldots\right]$$
$$+\left[\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{(a^2+1)^2}+\frac{1}{(a^2+1)^3}+\ldots\right]$$
$$+\ldots+\left[\frac{1}{a^n+1}+\frac{1}{(a^n+1)^2}+\frac{1}{(a^n+1)^3}+\ldots\right],$$

când n tinde la infinit, a fiind un număr mai mare ca 1.

N. B.

E. 2. Se dau $\sin a = 0{,}961$, $\operatorname{tg} b = 0{,}543$.

Să se calculeze: $\sin(a-2b)$, $\operatorname{tg}(a-2b)$.

M. G.

E. 3. Se dau

$$\sin^2 x = \frac{a}{a+b} \text{ , } \operatorname{tg} y = \sqrt{\frac{b}{a}} .$$

Să se găsească relațiunea dintre x și y.

M. G.

E. 4. Să se verifice egalitatea:

$$\sin 24^0 \sin^2 72^0 + \sin 36^0 \sin^2 78^0 = \cos 12^0 \cos 18^0.$$

C. I. B.

E. 5. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sin(a+b)+\sin a+\sin b}{\cos(a+b)-\cos(a-b)} = \frac{1-\cos(a+b)}{\sin(a+b)-\sin a-\sin b} .$$

C. I. B.

E. 6. Se dă:

$$\sin x = \operatorname{tg} a \qquad (0 \leqslant a \leqslant 45^0).$$

Să se exprime $\sin a$ în funcțiune de $\operatorname{tg} x$.

C. I. B.

E. 7. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sin^4 a + \cos^4 a}{\sin^4 b + \cos^4 b} = \frac{1 + 2\sin^6 a + 2\cos^6 a}{1 + 2\sin^6 b + 2\cos^6 b}.$$

C. I. B.

E. 8. Să se transforme într'o expresiune calculabilă prin logaritmi, expresiunea

$$E = \cos a + \cos 2a + \sin 3a.$$

C. I. B.

E. 9. Să se verifice identitatea:

$$\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} 2a + \operatorname{tg} 3a = \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg} 2a \operatorname{tg} 3a.$$

C. I. B.

INSTRUCȚIUNI

Soluțiile exercițiilor se vor scrie cu cerneală, pe sferturi de coală și numai pe o parte a foii.

Dacă va fi nevoe de mai multe foi pentru soluționarea unui exercițiu, ele se vor coase sau lipi în partea stângă. Figurile, ce vor fi necesare pentru urmărirea exercițiului, se vor construi îngrijit, cu cerneală sau tuș, pe foi aparte, având formatul arătat mai sus și se vor coase sau lipi odată cu soluția.

Nu se vor trimite soluțiile mai multor exerciții pe aceiași foae.

Redactarea soluțiilor se va face astfel:

Sus, se va scrie numărul exercițiului, dedesubt enunțul asfel cum e publicat în revistă, apoi soluția clar compusă, iar la sfârșit, iscălitura rezolvatorului în ordinea următoare:

Nume de botez complet, inițiala părintelui, numele de familie, însoțite de clasa și școala pe care o urmează.

Nu se vor lua în considerare soluțiile iscălite de 2 sau mai mulți corespondenți, nici soluțiile exercițiilor propuse la clase inferioare aceleia în care corespondentul se află.

Soluțiile se primesc numai dela abonații «Suplimentului cu Exerciții» al *Gazetei Matematice.*

Drepturile de reproducere rezervate Societății „Gazeta Matematică".

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL I. No. 2 — 1 NOEMVRIE 1934

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii, abonamente şi orice corespondenţă pe adresa:
Lt.-Comandor GR. ZAPAN

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII PROPUSE

Clasa IV-a. *Exerc. 10.* Care din numerele:

$$1-\sqrt{2}+\sqrt{3}\ ;\ \sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}\ ;\ \sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{11}$$

este mai mare?

Unitatea fiind cât un cm în toate.

O. N. Ţ.

IV. 11. Dintr'un punct M aşezat pe latura AC a triunghiului ABC se construiesc perpendicularele $\overline{MN}$, $\overline{MP}$ şi paralelele $\overline{MR}$, $\overline{MS}$ cu celelalte două laturi AB, CB respectiv.

Să se arate că: $\dfrac{\overline{MR}}{\overline{MS}}=\dfrac{\overline{MN}}{\overline{MP}}$.

A. A. R.

IV. 12. Ce proprietate rezultă, din exerciţiul precedent, pentru perpendicularele $\overline{MN}$, $\overline{MP}$ pe laturile AB, CB, când M este mijlocul laturei $\overline{AC}$?

Să se demonstreze direct acea proprietate.

O. N. Ţ.

IV. 13. Un triunghiu ABC are $\overline{AB}=4$ cm, $\overline{AC}=8$ cm, $\overline{BC}=10$ cm. Se ia punctul D pe latura $\overline{AB}$, astfel ca $\overline{AD}=1$ cm. Paralela dusă prin D la AC taie latura BC în E, paralela dusă prin D la BC taie latura AC în F, iar paralela dusă prin E la AB taie dreptele AC şi DF în G şi H.

Să se calculeze laturile triunghiului FGH.

C. I. B.

IV. 14. Un triunghiu ABC are $AB = 4$ cm, $BC = 10$ cm, $CA = 8$ cm. Prin punctul O, aflat în interiorul triunghiului, se duce o paralelă la BC, care taie pe AB şi AC în D şi E, o paralelă la AC, care taie pe AB şi BC în F şi G, şi o paralelă la AB, care taie pe AC şi BC în H şi I.

Dacă $OD = 5$ cm şi $DE = 7{,}5$ cm, să se calculeze segmentele DF şi HE.

C. I. B.

IV. 15. Un triunghiu ABC are $AB = 3m$, $BC = 7{,}2m$, $CA = 6m$. Se ia un punct D pe BC astfel ca $AD = 3{,}6m$ şi un punct O pe AD astfel ca $AO = 1{,}2m$. Paralela după prin O la BC taie pe AB în E şi pe AC în F. Paralelele duse prin E şi F la AC şi AB întâlnesc pe BC în G şi H.

Se se calculeze segmentul HG.

C. I. B.

IV. 16. Să se găsească valoarea produsului:

$$(1-a)(1+a)(1+a^2)(1+a^4)(1+a^8)\ldots(1+a^{64}).$$

O. N. Ţ.

IV. 17. Intr'o zi senină, un cercetaş trebuie să afle înălţimea unei antene T. F. F. aşezată în câmpie. Pentru împlinirea misiunii i s'a dat un jalon şi un metru.

Cum va afla înălţimea antenei?

C. I. B.

IV. 18. Să se găsească valorile numerice ale produsului:

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(x-1)$$

pentru valorile:

$$x = 10\ ;\ x = 10^3\ ;\ x = 10^7.$$

Să se scrie în mod obicinuit aceste valori.

O. N. Ţ.

IV. 19. Să se calculeze valoarea expresiunii:

$$E = [(x^2+y^2)^2 - 4x^2y^2]^3$$

pentru valorile

$$x = 500500\ ,\ y = 499500,$$

aducându-se la un calcul mintal uşor.

O. N. Ţ.

IV. 20. Am făcut o înmulțire și am oprit dela calcul numai cifra 5, iar pe celelalte le-am înlocuit cu *. Calcul se prezintă astfel :

$$\begin{array}{r} 5\,*\,* \\ 5\,*\,* \\ \hline 5\,*\,* \\ *\,*\,5\,* \\ *\,*\,*\,5 \\ \hline *\,*\,*\,5\,*\,* \end{array}$$

Să se restabilească înmulțirea.

I. I.

Clasa V-a. *Exerc. 10.* Să se stabilească identitatea

$$(a+2b-c+2)(a+2b-c+3)-4(b+1)(a+b+1)$$
$$+(2c-1)(a+2b-c+2) \equiv a^2-c^2.$$

G. T. G.

V. 11. Să se arate că

$$\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)\left(x-2-\frac{2(x-2)}{3(x-2)^2-1}\right)=3.$$

G. T. G.

V. 12. Să se simplifice fracțiunea

$$\frac{(x+1)(x+2)(x+3)-6(x+1)(x+2)+7(x+1)-1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-10(x+1)(x+2)(x+3)+25(x+1)(x+2)-15(x+1)+1}$$

G. T. G.

V. 13. Să se determine l, m, n, p astfel ca fracțiunea

$$\frac{x^4+lx^3+mx^2+nx+p}{x^3+3x^2+x-5}$$

prin simplificare să devină

$$\frac{x^2-4x+5}{x-1}.$$

C. I. B.

V. 14. Se dă trinomul $P(x) \equiv ax^2+bx+c$.

Dacă $P(1)=4$ și $P(2)=9$, să se găsească valorile numerice ale coeficienților astfel ca trinomul dat să fie pătrat perfect.

A. A. R.

V. 15. Să se demonstreze că suma a $(2n + 1)$ numere fără soţ, este un număr fără soţ.

A. A. R.

V. 16. Dacă fiecare din două numere este o diferenţă de două pătrate perfecte, produsul lor este de asemenea o diferenţă de două pătrate perfecte.

O. N. Ţ.

V. 17. Dacă un număr întreg este o diferenţă de două pătrate perfecte, orice putere întreagă a acelui număr este o diferenţă de două pătrate perfecte.

N. B.

V. 18. Să se găsească un număr de două cifre astfel ca suma cifrelor lui să facă cât de cinci ori semidiferenţa lor, iar prima cifră să întreacă dublul celei dea doua cu o unitate.

G. T. G.

V. 19. Intr'un cerc suma laturei exagonului înscris cu latura pătratului înscris întrece latura triunghiului echilateral înscris în acelaş cerc cu $5m$.

Care este lungimea razei cercului?

G. T. G.

V. 20. Să se găsească un număr de două cifre, care adunat cu răsturnatul său să dea 187.

C. I. B.

V. 21. Să se găsească un număr de trei cifre, astfel ca diferenţa dintre el şi răsturnatul său să fie 792.

C. I. B.

V. 22. Pe dreptele Ox, Oy, Oz, care sunt două câte două perpendiculare, se consideră respectiv punctele A, B, C astfel încât $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$.

Să se arate că: aria $ABC = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}$.

C. I. B.

V. 23. Pe dreptele Ox, Oy, Oz perpendiculare între ele, se consideră punctele A, B, C astfel încât $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$.

Să se arate că lungimea înălţimei $\overline{OH}$ a piramidei OABC este dată de formula:

$$\overline{OH} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}.$$

C. I. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 10.* Să se discute natura rădăcinilor ecuației:

$$(a^2 - 1)\,x^4 - 2\,(a^2 - 3a + 2)\,x^2 + (a^2 - a - 2) = 0,$$

a fiind un număr real.

O. N. Ț.

VI. 11. Să se rezolve sistemul

$$x^2 + y^2 = a^2\ ,\ xy = b^2.$$

1^0 prin metoda substituției; 2^0 cu ajutorul sumei și produsului rădăcinilor.

Să se stabilească identitatea celor două forme ale unei rădăcini oarecare.

(a și b două numere reale oarecare).

O. N. Ț.

VI. 12. x_1 și x_2 fiind rădăcinile ecuației:

$$x^2 + px + q = 0, \tag{1}$$

să se calculeze valoarea fracțiunii:

$$E \equiv \frac{\dfrac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \dfrac{x_2^2}{x_1 - x_2} + \dfrac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}}{\dfrac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2} - \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} - \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 - x_2^2} + \dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}}$$

fără a rezolva ecuațiunea (1).

O. N. Ț.

VI. 13. Se dă trinomul:

$$P(x) \equiv ax^2 + bx + c$$

astfel ca:

$$P(1) = 1\ ;\ P(2) = 12\ ;\ P(3) = 35.$$

Să se rezolve ecuațiunea:

$$P(x^2 + a + b + c) = 0.$$

A. A. R.

VI. 14. Să se simplifice fracțiunea

$$\frac{x^6 - (a^2 + b^2 + c^2)\,x^4 + (a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)\,x^2 - a^2b^2c^2}{x^3 - (a + b + c)\,x^2 + (ab + ac + bc)\,x - abc}.$$

C. I. B.

VI. 15. Fie A unul din punctele comune a două cercuri secante şi B, C punctele unde tangentele lor comune sunt tăiate de coarda comună.

Dacă razele OA şi O'A ale celor două cercuri sunt perpendilare, (cercurile se numesc în acest caz *ortogonale*) şi au lungimile cunoscute R, *r*, să se calculeze segmentele $\overline{AB}$, $\overline{AC}$.

C. I. B.

VI. 16. Volumul oricărui paralelipiped dreptunghiu, pentru care lungimile muchiilor şi lungimea diagonală sunt patru numere în progresie aritmetică, se află într'un raport constant cu volumul cubului, care are drept muchie o muchie a paralelipipedului dreptunghiu.

C. I. B.

VI. 17. Se consideră un patrulater convex sau concav ABCD. Fie O punctul de întâlnire al diagonalelor AC, BD, iar R_1, R_2, R_3, R_4 respectiv razele cercurilor circumscrise triunghiurilor AOB, BOC, COA, DOA. Să se arate că dacă una din relaţiunile

$$R_1 \pm R_2 = R_3 \pm R_4$$

este îndeplinită, atunci patrulaterul este circumscris unui cerc.

N. B.

VI. 18. Să se determine arcul *x*, mai mic ca 90^0, aşa încât să avem :

$$\sin (mx + n) = \cos (px + q).$$

C. I. B.

VI. 19. Se dau în spaţiu două puncte fixe A, B şi 0 dreaptă fixă D. Să se găsească pe dreapta D un punct I egal depărtat de A şi B. Discuţiune asupra posibilităţii problemei şi asupra numărului soluţiunilor.

Aceeaşi problemă, când se înlocueşte dreapta fixă D printr'un plan fix P.

O. N. Ţ.

VI. 20. Să se calculeze geometric sin 15^0 ; apoi cos$7^0 30'$.

O. N. Ţ.

VI. 21. Să se găsească cea mai simplă fracţiune ca numitor raţional egală cu următoarea :

$$\frac{(2+\sqrt{6}+\sqrt{10})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$$

O. N. Ţ.

VI. 22. Înălțimile AA', BB', CC' ale triunghiului ABC se întâlnesc în punctul H. Un cerc trecând prin H întâlnește înălțimile în A'', B'', C''.

Se poartă pe înălțimi, dela vârfuri către laturi, lungimile:

$$\overline{AA_1} = 2\,\overline{A'A''}\,,\ \overline{BB_1} = 2\,\overline{B'B''}\,,\ \overline{CC_1} = 2\,\overline{C'C''}.$$

Se poartă pe înălțimi, din punctele A', B', C' către vârfuri, lungimile:

$$\overline{A'A_2} = \frac{\overline{AA''}}{2}\,,\ \overline{B'B_2} = \frac{\overline{BB''}}{2}\,,\ \overline{C'C_2} = \frac{\overline{CC''}}{2}\,.$$

Să se arate că cercurile $A_1B_1C_1$ și $A_2B_2C_2$ trec prin H.

N. B.

VI. 23. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Perpendiculara pe mijlocul laturei $\overline{BC}$ întâlnește cercurile BOA, COA respectiv în M și N. Tangentele în M și N respectiv la cercurile AOB și AOC întâlnesc laturile AB, AC în punctele P, Q, astfel că dreapta PQ este paralelă cu BC. N. B.

VI. 24. Prin vârful A al triunghiului ABC se duce o dreaptă oarecare D. Se proiectează punctele B și C respectiv în B' și C' pe D. Paralela dusă prin B' laturei BC întâlnește pe AC în B_1, iar paralela dusă prin C' laturei BC întâlnește latura AB în C_1.

Să se arate că dreapta B_1C_1 este perpendiculară pe direcțiunea dreptei D. N. B.

VI. 25. Să se calculeze $\sin 22^0 30'$ cu o aproximație mai mică ca 0,0001. O. N. Ț.

Clasa VII-a. *Exerc. 10.* A și B fiind două puncte fixe, iar O mijlocul segmentului $\overline{AB}$, să se găsească locul geometric al punctelor M pentru care

$$\sin AMO = k\,\sin OMB,$$

k fiind o constantă. C. I. B.

VII. 11. Se dă $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}$.

α fiind un arc din cadranul I, se cere condițiunea pe care trebuie s'o îndeplinească, pentru ca egalitatea să aibă existență oricare ar fi x; apoi să se arate că

$$1 + 2\,\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos 2\alpha}\,.$$

C. I. B.

VII. 12. Să se verifice egalitatea:

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+\arcsin\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt[4]{6^3}}{2\sqrt{5}}=\frac{\pi}{3}.$$

C. I. B.

VII. 13. Să se verifice identitatea:

$$\cos^8 a-2\cos^6 a+2\cos^4 a-\cos^2 a=\sin^8 a-2\sin^6 a+2\sin^4 a-\sin^2 a.$$

O. N. Ţ.

VII. 14. Să se găsească adevărata valoare a fracţiei

$$\frac{x^2-7+\sqrt{x^4-3x+1}}{x-5+\sqrt[3]{7x^6+x+2}}$$

când x tinde către infinit. A. A. R.

VII. 15. Aria unui triunghiu isoscel este $3m^2$, iar mediana corespunzătoare uneia din laturile egale este de $3m$. Să se rezolve triunghiul. C. I. B.

VII. 16. Să se construiască, cu rigla şi compasul, un paralelogram căruia i se cunosc laturile şi unghiul diagonalelor. Discuţiune. C. I. B.

VII. 17. Să se construiască, cu rigla şi compasul, un paralelogram căruia i se cunosc diagonalele şi unghiul a două laturi. Discuţiune. C. I. B.

VII. 18. In patrulaterul ABCD înscris în cercul fix O, latura AD e fixă, iar latura BC are o lungime constantă. Se cere locul geometric al intersecţiei dreptelor AB şi CD. N. B.

VII. 19. Pe cercul O se iau un punct fix I şi un punct mobil M. Se construieşte triunghiul echilateral IMP şi se cere locul descris de punctul P când M descrie cercul O. N. B.

VII. 20. Se dau în plan punctele fixe B, C şi punctul A mobil ori cum. Fie C_a , C'_a şi B_a , B'_a proecţiile vârfurilor C şi B pe bisectoarele unghiului A. Să se demonstreze că diagonalele $C_a C'_a$, $B_a B'_a$ a dreptunghiurilor $CC_a AC'_a$, $BB_a AB'_a$ se întâlnesc într'un punct fix. G. B.

VII. 21. Dacă N este un număr întreg atunci $N+1$ şi N^2-2 sunt prime între ele, iar $N+1$ şi N^2+2 nu pot admite alt divizor comun în afară de 3. G. B.

BIBLIOTECA CENTRALA
A. ASOCIATIUNII

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL I. No. 3 — 1 DECEMVRIE 1934

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii, abonamente şi orice corespondenţă pe adresa:
Lt.-Comandor GR. ZAPAN

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII PROPUSE

Clasa IV-a. *Exerc. 21.* Trei străzi, întâlnindu-se câte două, formează un triunghiu dreptunghiu ABC. Străzile $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$, care sunt catetele triunghiului, au respectiv 216m şi 288m. Care va fi lungimea segmentelor de dreaptă care reprezintă pe $\overline{AB}$ şi $\overline{AC}$, într'un plan al oraşului în care $\overline{BC}$ este reprezentat printr'un segment de dreaptă de 4,5 cm.

C. I. B.

IV. 22. Raza unui cerc dat este R. Să se afle depărtarea de centru a unui punct P exterior cercului, ale cărui tangente la cerc fac un unghiu de 60^0.

C. I. B.

IV. 23. Fie M un punct a cărui distanţă la centrul unui cerc este egală cu diametrul cercului. Să se arate, că triunghiul, format de cele două tangente duse din M la cerc şi coarda ce uneşte punctele de contact, este echilateral.

C. I. B.

IV. 24. Să se stabilească identitatea:

$$(a+b-c+d)(a-b+c+d)+(a+b-c+d)(-a+b+c+d)+$$
$$(a+b+c-d)(a-b+c+d)+(a+b+c-d)(-a+b+c+d)$$
$$=4(a+b)(c+d).$$

G. T. G.

IV. 25. Să se verifice identitatea:

$$(a^2+b^2-1)(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2+1)(a^2-b^2)^2\equiv$$
$$\equiv 2a^2[(a^2+b^2-1)(a^2-b^2+1)+(2b^2-1)^2].$$

C. I. B.

IV. 26. Să se calculeze valoarea numerică a expresiunii

$$E\equiv\left(\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}+1\right):\left(\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}-1\right)$$

pentru $a=72$, $b=48$. C. I. B.

IV. 27. Avem trei puncte în spațiu: O, A, B. Prin punctul O se duc planele P și R respectiv perpendiculare pe OA și OB, care se taie după dreapta OC. Ce proprietate are dreapta OC?

b. M fiind un punct pe AB se duce planul S perpendicular pe OM în punctul O. Ce se întâmplă cu planul S, când punctul M se mișcă pe dreapta AB.

O. N. Ț.

IV. 28. Se dă în spațiu unghiul AOB, diferit de 90^0. In punctul O se ridică perpendiculara OC pe planul AOB; apoi perpendicularele OD și OE respectiv pe planele COB și COA. Dreptele OD și OE sunt în planul AOB și unghiul DOE este egal sau suplimentar cu $\sphericalangle$ AOB. Ce se întâmplă când AOB este unghiu drept?

O. N. Ț.

Clasa V-a. *Exerc. 24.* Să se demonstreze identitatea:

$$2(2x+1)(x+y)(x-y+1)+2y(2x+1)(2y+2z+1)$$
$$-(x-y)(x-y+1)(2x-2z-1)$$
$$\equiv(x+y)(x+y+1)(2x+2z+3)$$

G. T. G.

V. 25. Să se demonstreze identitatea:

$$(p-3a)^3+(p-3b)^3+(p-3c)^3\equiv 3(p-3a)(p-3b)(p-3c)$$

unde $p=a+b+c$. G. T. G.

V. 26. Să se simplifice fracțiunea:

$$\frac{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1}{x^4 - 1}.$$

G. T. G.

V. 27. Să se descompună în produs de factori de gradul întâi expresiunea:

$$E \equiv a(2 + 3a + 3a^2 + a^3)(3 + 3a + a^2) - 3a(2 + a)(1 + a)^2.$$

C. I. B.

V. 28. Să se arate că expresiunea:

$$E \equiv x^{96} + (1 - x^{32})(1 - x^{16} + x^{32})(1 - x^8 + x^{16})$$
$$(1 - x^4 + x^8)(1 - x^2 + x^4)(1 + x^2 + x^4)$$

păstrează aceeași valoare când x variază.

C. I. B.

V. 29. Să se arate că expresiunea:

$$E \equiv a^8(1 + a^2)^2 + (1 + a^2 + a^4 + a^6)(1 + a + a^2 + a^3)(1 - a + a^2 - a^3)$$

este pătratul unei expresiuni raționale.

C. I. B.

V. 30. Să se arate că expresiunea:

$$E \equiv a^{16} + (1 - a^8 + a^{16})(1 - a^4 + a^8)(1 - a^2 + a^4)(1 - a + a^2)(1 + a + a^2)$$

este pătratul unei expresiuni raționale.

C. I. B.

V. 31. Se dă triunghiul isoscel ABC. Bisectoarea unghiului B întâlnește latura opusă în D, iar paralela dusă prin D la baza BC taie latura AB în punctul E. Să se arate că $\sphericalangle CED = \sphericalangle ECD$.

C. I. B.

V. 32. In triunghiul ABC, fie D piciorul bisectoarei unghiului B, iar E punctul de întâlnire cu latura AB al paralelei dusă prin D la BC. Dacă triunghiul DEC este isoscel, să se arate că triunghiul ABC este asemenea isoscel.

C. I. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 26.* Să se verifice egalitatea:

$$\frac{a^4\,(a^a)^a}{(a^5)^a} = \left(\frac{a^a}{a}\right)^a : \frac{(a^4)^a}{a^4}\,.$$

C. I. B.

VI. 27. Să se calculeze valoarea numerică a expresiunii:

$$\sqrt{a^2+b^2\sqrt{a^2+b^2\sqrt{a^2+5b^2}}}$$

pentru $a=4$, $b=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

C. I. B.

VI. 28. Să se facă rațional numitorul fracțiunii

$$\frac{1}{(1-\sqrt{a}+a)(1-\sqrt[4]{a}+\sqrt{a})(1-\sqrt[8]{a}+\sqrt[4]{a})(1-\sqrt[16]{a}+\sqrt[8]{a})}$$

C. I. B.

VI. 29. Să se verifice egalitatea:

$$\frac{1+2\,\sin 20^0}{1-2\,\sin 20^0} = \frac{1+\sin 20^0}{\cos 20^0\ \mathrm{tg}15^0.}\,.$$

C. I. B.

VI. 30. Să se verifice egalitatea

$$\mathrm{tg}20^0 = \frac{2\cos 20^0-1}{2\sin 20^0+\sqrt{3}}\,.$$

C. I. B.

VI. 31. Să se verifice egalitatea

$$\mathrm{tg}10^0 = \frac{1-4\,\sin 10^0}{\sqrt{3}}\,.$$

C. I. B.

VI. 32. Să se verifice egalitatea

$$\mathrm{tg}20 = \sqrt{3}-4\,\sin 20^0.$$

C. I. B.

VI. 33. Să se verifice egalitatea

$$\operatorname{tg} 10^0 = \frac{2\cos 10^0 - \sqrt{3}}{2\sin 10^0 + 1}.$$

C. I. B.

VI. 34. Să se efectueze produsul

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a^2} \cdot \sqrt[n]{a^3} \ldots \sqrt[n]{a^n}.$$

G. T. G.

Clasa VII-a. *Exerc. 22.* Se consideră expresiunea:

$$E \equiv \frac{T^5 - 5T^4 + 10T^3 - 10T^2 + 5T - 33}{T^4 - 4T^3 + 6T^2 - 4T - 15}$$

unde $T \equiv 3x^2 + 5x + 5$. Să se găsească adevărata valoare a acestei expresiuni: *a)* pentru $x = -1$ *b)* pentru $x = -\frac{2}{3}$.

O. N. Ţ.

VII. 23. Se consideră triunghiul ABC. Pe latura BC se ia punctul A', iar prin vârfurile B, C, se duc dreptele paralele BB_1, CC_1.

Paralela dusă prin A' la AC întâlneşte dreapta BB_1 în B', iar paralela dusă prin A' la AB întâlneşte dreapta CC_1 în C'.

Să se arate că punctele A, B', C' sunt în linie dreaptă.

N. B.

VII. 24. Fie D punctul în care bisectoarea unghiului A al unui triunghiu ABC taie latura BC. Paralelele laturilor AB şi AC, duse prin D, întâlnesc respectiv laturile AC şi AB în E şi F. Să se afle aria patrulaterului AEDF, când se cunosc lungimile laturilor triunghiului ABC.

C. I. B.

VII. 25. Fie A'B'C'D' patrulaterul format prin unirea proiecţiunilor consecutive ale punctului M pe laturile patrulaterului inscriptibil ABCD, în al cărui plan se află.

Patrulaterul obţinut unind proiecţiunile consecutive ale lui M pe laturile patrulaterului A'B'C'D' este inscriptibil.

C. I. B.

VII. 26. Să se stabilească relaţiunea :

$$1 + C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + C_3^3 + C_4^3 = 2^4.$$

O. N. Ţ.

VII. 27. Să se arate că :

$$A_2^1 A_3^2 A_4^3 \ldots A_{m-1}^{m-2} \cdot A_m^{m-1} = 1!\ 2!\ 3! \ldots (m-1)!\ m!$$

unde A_l^k înseamnă numărul aranjamentelor.

O. N. Ţ.

VII. 28. Să determine m, întreg şi pozitiv, astfel ca să avem egalitatea :

$$A_m^7 \cdot A_m^4 = A_m^6 \cdot A_m^5.$$

O. N. Ţ.

VII. 29. Să se demonstreze că dacă un pătrat perfect este de forma $25m + 9$, pătratul precedent sau următor va fi de forma $25m - 9$.

G. B.

VII. 30. Să se arate că expresiunea

$$E \equiv 3 \cdot 5^{2p+1} + 10(100 \cdot 5^{2p+3} - 45 \cdot 25^{p-1}) + 81 \cdot 25^p$$

unde p e un număr întreg şi pozitiv, este divizibilă cu 43.

C. I. B.

S'au primit soluţii bune dela:

Liceul Militar Iaşi:

Clasa V-a: BÂRCĂ GH. (V : 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9), CORNĂŢEANU I. A. (V : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), STREDER G. I. (V : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9), VASILACHE I. G. (V : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Clasa VI-a: BOGDAN G. I. (VI : 1, 2, 3, 4, 7. VII : 1, 7), BOGZA G. V. (VI : 1, 2, 3, 4), BUCUR V. (VI : 1, 2, 3, 4, 9. VII : 1), COJOCARU P. P. (VI : 2, 3, 4, 8. VII : 1, 7), COTESCU C. (VI : 1, 2, 3, 4), DUMBRĂVESCU G. D. (VI : 1, 2, 3, 4), DIMITRIU C. I. (VI : 1, 2, 3, 4, 7. VII : 7), ENĂŞESCU D. V. D. (VI : 1, 2, 4, 8), GRECU V. S. (VI : 1, 2, 3, 4, 7. VII : 7), HERBAY E. EM. (VI : 1, 2, 4, 8).

Liceul Militar „Ştefan cel Mare" Cernăuţi.

Clasa IV-a: ALEXANDRESCU P. (IV : 1, 2), BREŢEANU C. (IV : 2, 8), CAPRIŞ V. M. (IV : 2, 8). CONSTANTINESCU D. (IV : 8), COSMA A. (IV : 4, 8), DUMITRESCU C. P. (IV : 2, 6, 8), PATRICHI C. V. (IV : 2, 8).

Clasa V: APOSTOL G. N. (V: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9), ARHIPESCU M. C. (V: 1, 2, 6, 9), BĂNICĂ M. G. (V: 1, 6), BOSINCEANU D. GH. (V: 1, 2, 6, 7, 9), BOŞOLDEA GH. A. (V: 1, 2, 6, 9), CURCĂ G. C. (V: 1, 2, 3, 6, 9), FLOAREŞ I. A. (V: 1, 2, 3, 6, 7, 9), GIOCIANU C. A. (V: 1, 2, 6, 7, 8, 9), LAZĂR T. A. (V: 1, 2, 6), MAREŞ D. P. (V: 1, 2, 4, 6), MINACIU T. N. (V: 1, 7, 8, 9), MITITELU S. C. (V: 1. 2, 6), NEDELCU V. N. (V: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9), NICOLAESCU I. T. (V: 1), PARASCHIVESCU T. M. (V: 1, 2, 6, 7, 8, 9), PETRE D. M. (V: 3), RUSU I. E. (V: 1, 2, 3, 6, 7, 9), ŞTEFANOV P. ŞT. (V: 6, 9), TARAZE GH. V. (V: 1, 2, 6, 7, 8, 9), TOMESCU G. T. (V: 1, 2, 6, 9), VASILIU N. N. (V: 1, 2, 9).

Clasa VII-a: BOITAN P. N. (VII: 1, 3, 4, 8), BURGHELEV V. S. (VII: 1, 3, 4, 7, 8), CASANDRA G. V. (VII: 4, 8), COSTINESCU D. E. (VII: 1, 4), DUMITRESCU I. P. (VII: 1, 4, 7), MĂGALĂ I. G. (VII: 1, 3, 4, 7, 8, 9), OPRAN C. (VII: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), ROMAN I. N. (VII: 1, 3, 4, 9), SURUMEI I. M. (VII: 8).

Liceul Militar „Mihai Viteazul" Tg. Mureş.

Clasa III-a: JERGHIE I, (IV: 2, 6), MILITARU A. (IV: 2, 6), OPRESCU I. I. (IV: 2), PÂRLOAGĂ D. (IV: 2), RĂDULESCU A. V. (IV: 3), STĂNESCU F. D. (IV: 2), TĂNĂSESCU N. N. (IV: 2, 3), VARTIC D. I. (IV; 2, 3), VOICULESCU G. (IV: 2, 3), ZEVELEANU GH. (IV: 2).

Clasa IV-a: BÂRZAN M. (IV: 1, 2), BEJENARU V. (IV: 1).

Clasa V-a: ANCA I. (V: 1, 2, 3. VI: 1, 2), BANCIU P. C. (V: 3, 9), BERCEA I. (V: 1), BOBORODEA I. (V: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), COMĂNECI V. A. (V: 1, 2), GEORGESCU E. (V: 3), JAMCIO S. F. (V: 1), MĂCIUCEANU P. (V: 1. VI: 2, 7), MUNTEANU V. L, (V: 1, 2, 8, 9), ROVENŢA O. (V: 1, 2, 9), STANCOVICI V. (V: 1, 2), STOINA T. (V: 1).

Clasa VI-a: ALBIN M. (VI: 2), ANTONIU C. S. (VI: 1, 4), BEŞCHEA C. (VI: 1, 2, 4), BUCURENCIU I. V. (VI: 1, 2, 3, 4), FENICHI AL. (VI: 1, 2, 3, 4), GREAB I. V. (VI: 2, 3, 4), MATEI I. I. (VI: 1, 2, 3, 4),MOVAN I. V. (VI: 4), POP G. ŞT. (VI: 1, 3), RAFIROIU M. (VI: 2), SCHIAN A. (VI: 1, 2, 3), STOIAN S. I. (VI: 2), TODEA D. I. (VI: 1, 4), VASU A. N. (VI: 1, 2, 3, 4, 7).

Clasa VII-a: DECEANU G. (VII: 3, 4, 5, 9), SCĂRLĂTESCU I. (VII: 3, 4, 9), STĂNESCU G. M. (VII: 5).

Liceul Militar „N. Filipescu" Mânăstirea Dealu.

Clasa IV-a: FLORESCU L. V. (IV: 1, 2, 3, 4, 8, 9. V: 6, 9).

Clasa V-a: BĂDULESCU V. D. (V: 1, 2, 3, 4, 6, 9. VI: 1).

Clasa VI-a: MOSCU D. T. (VI: 2, 3, 4).

Clasa VII-a: LĂZĂROIU I. R. (VII: 3, 5, 7).

Liceul Militar Chişinău.

Clasa VI-a: BULAT L. M. (VI: 3).

Liceul de Fete „Regina Maria" Bucureşti.

Clasa VI-a: TĂNĂSESCU V. (VI: 1, 2, 3, 4, 7, 8. VII: 1).

Liceul „Samuil Vulcan" Beiuş.

Clasa IV-a: ARDELEANU V. A. (IV: 1, 2, 3, 6).

Liceul „Bariţiu" Cluj.

Clasa V-a: NIŢESCU C. G. (V: 1, 2, 9).

Liceul „Diaconovici Loga" Timişoara.

Clasa V-a: ALACI V. V. (V: 1).

Liceul „Nicolae Bălcescu" Brăila.

Clasa VII-a. GOLDENBERG E. M. (VII: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Liceul „Aurel Vlaicu" Bucureşti.

Clasa IV-a: FULGA T. (IV: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Liceul „Marele Voevod Mihai" Bucureşti.

Clasa VII-a: STOICA D. AL. (VII: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Liceul „Mihail Eminescu" Bucureşti.

Clasa V-a: BĂDULESCU V. V. (V: 1, 2, 6).

Liceul „Cantemir Vodă" Bucureşti.

Clasa V-a: NEGRESCU AL. (V: 1, 2).

Liceul „Sft. Iosif" Bucureşti.

Clasa VII-a: MICHEL M. A. (VII: 2, 3, 4, 7).

Liceul „Spiru Haret" Bucureşti.

Clasa II-a: NEGRESCU GH. (IV: 1).

Liceul „Mihai Viteazul" Bucureşti.

Clasa V-a: DOBRESCU GH. L. (V: 1, 2, 3, 8), GHIULAMILA C. (V: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9). IORDAN M. C. (V: 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9), LASCĂR M. (V: 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9), STĂNESCU GH. T. (V: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9), STRUŢEANU S. M. (V: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).

Clasa VI-a: COPEL M. I. (VI: 3, 4), CRISTESCU I. GH. (VI: 2, 3, 4, 8), BEIU-PALADE E. (VI: 3, 4, 13), RÂGÂLIE N. I. (VI: 2).

Liceul „Gh. Lazăr" Bucureşti.

Clasa IV-a: ANGELESCU V. E. (IV: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9).

Clasa VI-a: BĂDULESCU M. (VI: 7), BEGU I. ŞT. (VI: 1, 2, 3, 4, 8), BREZEANU D. O. (VI: 3, 4), COGAN H. I. (VI: 2, 3, 4), DRĂGHICESCU F. M. (VI: 1, 2, 3, 4, 8), FILIPESCU D. (VI: 2, 3, 4), HAIER E. (VI: 1, 2, 3, 4), IORDACHE I. C. (VI: 3, 4, 8), LUPAŞCU A. O. (VI: 2, 3), SCHRAMM F. B. (VI: 2, 3, 4).

Instrucţiunile privitoare la redactarea soluţiilor exerciţiilor propuse se găsesc în Nr. 1, pag. 8.

Nu se primesc probleme propuse decât dela membrii din redacţia „Gazetei Matematice".

Drepturile de reproducere rezervate Societăţii „Gazeta Matematică".

D. r 4 —

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL I. No. 4 — 1 IANUARIE 1935

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii, abonamente şi orice corespondenţă pe adresa:
Lt.-Comandor GR. ZAPAN

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa IV-a. *Exerc. 7.* Să se simplifice fracţiunea:

$$\frac{x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2}{x^2+(a+b)x+ab}.$$

C. I. B.

$$\frac{x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2}{x^2+(a+b)x+ab}=\frac{x^4-a^2x^2-b^2x^2+a^2b^2}{x^2+ax+bx+ab}$$

$$=\frac{x^2(x^2-a^2)-b^2(x^2-a^2)}{x(x+a)+b(x+a)}=\frac{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}{(x+a)(x+b)}=(x-a)(x-b)$$

Clasa V-a. *Exerc. 8.* Să se verifice identitatea:

$$\left(\frac{k}{a}-\frac{a}{k}\right)\left(\frac{k}{b}-\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{k}{b}-\frac{b}{k}\right)\left(\frac{k}{c}-\frac{c}{k}\right)\left(\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)$$

$$+\left(\frac{k}{c}-\frac{c}{k}\right)\left(\frac{k}{a}-\frac{a}{k}\right)\left(\frac{c}{a}-\frac{a}{c}\right)\equiv\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{b}-\frac{b}{c}\right)\left(\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right)$$

N. B.

Scăpând de numitori, e destul să arătăm că:

$$c^2(k^2-a^2)(k^2-b^2)(a^2-b^2)+a^2(k^2-b^2)(k^2-c^2)(b^2-c^2)$$

$$+b^2(k^2-c^2)(k^2-a^2)(c^2-a^2)\equiv k^2(b^2-a^2)(c^2-b^2)(a^2-c^2).$$

Să punem

$$k^2 = \lambda \ , \ a^2 = \alpha \ , \ b^2 = \beta \ , \ c^2 = \gamma.$$

Avem de demonstrat că

$$\gamma(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)(\alpha-\beta)+\alpha(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)(\beta-\gamma)+\beta(\lambda-\gamma)(\lambda-\alpha)(\gamma-\alpha)$$
$$\equiv \lambda(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)(\alpha-\gamma).$$

Prima parte este un polinom de gradul 4 în α, β, γ, λ, care se anulează, pe rând, pentru $\alpha = \beta$, $\beta = \gamma$, $\gamma = \alpha$, $\gamma = 0$. Deci se divide cu fiecare din factorii:

$$(\alpha-\beta) \ , \ (\beta-\gamma) \ , \ (\gamma-\alpha) \ , \ \lambda$$

Polinomul este de forma:

$$\mu.\lambda(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha$$

unde μ este independent de α, β, γ, λ.

Dând valori particulare, de exemplu, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = -1$, $\lambda = 1$, se găseşte imediat $\mu = 1$.

Clasa VI-a. *Exerc. 4.* Cum ambii membrii ai identităţei sunt pozitivi, identitatea va fi adevărată dacă

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 \equiv (\sqrt{6})^2.$$

Insă

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}})^2 = (2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})+2\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2} = 6$$

c. c. t. d.

VI. 7. Fie x_1 şi x_2; x'_1 şi x'_2 respectiv rădăcinile ecuaţiilor:

$$x^2+px+q=0 \ ; \ x^2+p'x+q'=0$$

Să se formeze ecuaţiunea în y având rădăcinile:

$$y_1 = x_1x'_1 \ , \ y_2 = x_2x'_2$$

N. B.

Folosind relaţiunile între rădăcini şi coeficienţi:

$$x_1+x_2=-p \ ; \ x'_1+x'_2=-p' \ ; \ x_1x_2=q \ ; \ x'_1x'_2=q'$$
$$x_1-x_2=\pm\sqrt{p^2-4q} \ ; \ x'_1-x'_2=\pm\sqrt{p'^2-4q'}$$

Vom avea:

$$y_1+y_2=x_1x'_1+x_2x'_2=\frac{(x_1+x_2)(x'_1+x'_2)+(x_1-x_2)(x'_1-x'_2)}{2}$$

$$=\frac{pp'\pm\sqrt{(p^2-4q)(p'^2-4q')}}{2}$$

$$y_1y_2=x_1x_2x'_1x'_2=qq'$$

şi ecuaţia cerută este:

$$y^2-\frac{pp'\pm\sqrt{(p^2-4q)(p'^2-4q')}}{2}y+qq'=0\,.$$

Clasa VII-a. *Exerc. 4.* Să se verifice egalitatea:

$$\sin 24^0\sin^2 72^0+\sin 36^0\sin^2 78^0=\cos 12^0\cos 18^0.$$

C. I. B.

Cum,

$$\sin 72^0=\cos 18^0\ ,\ \sin 78^0=\cos 12^0,$$

$$\sin 24^0=2\sin 12^0\cos 12^0\ ,\ \sin 36^0=2\sin 18^0\cos 18^0$$

egalitatea devine

$$2\sin 12^0\cos 12^0\cos^2 18^0+2\sin 18^0\cos 18^0\cos^2 12^0=\cos 12^0\cos 18^0$$

sau

$$2(\sin 12^0\cos 18^0+\sin 18^0\cos 12^0)=1.$$

$$2\sin 30^0=1\qquad,\qquad \sin 30^0=\tfrac{1}{2}.$$

VII. 6. Se dă

$$\sin x=\operatorname{tg}a\qquad(0\leqslant a\leqslant 45^0).$$

Să se exprime $\sin a$ în funcţie de $\operatorname{tg}x$.

C. I. B.

$$\sin a=\frac{\operatorname{tg}a}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2a}}=\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2x}}=\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}:\sqrt{1+\frac{\operatorname{tg}^2x}{1+\operatorname{tg}^2x}}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{1+2\operatorname{tg}^2x}}\,.$$

VII. 8. Să se transforme într'o expresiune calculabilă prin logaritmi, expresiunea :

$$E. = \cos a + \cos 2a + \sin 3a.$$

C. I. B.

Se ştie că :

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \tfrac{1}{2} A \cos \tfrac{1}{2} B \cos \tfrac{1}{2} C$$

dacă $$A + B + C = \pi.$$

Ori

$$E = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right) + \sin 3a$$

$$= 4\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - a\right)\cos\frac{3a}{2}$$

pentrucă

$$\frac{\pi}{2} - a + \frac{\pi}{2} - 2a + 3a = \pi.$$

VII. 9. Să se verifice identitatea

$$\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} 2a + \operatorname{tg} 3a = \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} 2a \operatorname{tg} 3a.$$

C. I. B.

Se ştie că

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$$

dacă

$$A + B + C = \pi.$$

Ori membrul I al egalităţii se poate scrie

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right) + \operatorname{tg} 3a = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 2a\right)\operatorname{tg} 3a$$

$$= \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} 2a \operatorname{tg} 3a.$$

S'au primit soluții bune dela.

Școala Centrală de fete „Marica Brâncoveanu" București.

Clasa IV-a: ALEXE C. LUCICA (IV: 1, 2, 3, 5, 6), CHIRIȚESCU CORA (IV: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), DUMITRESCU I. JEANA (IV: 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19), NICOLAU A. ELENA (IV: 1, 2, 3, 5, 6, 8), STOICA I. MARIA (IV: 1, 2, 3, 4, 5, 6), TUDORAN M. S. (IV: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7), VETTU PAULINA (IV: 1, 2, 5, 6, 8, 10, 21).

Clasa V-a: NASTA A. GABRIELA (V: 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 13, 19, 20, 24, 26, 27, 28, 29, 30), POPP SIMONA (V: 1, 2, 3, 4, 7, 10, 18).

Clasa VI-a: GILORTEANU P. ADINA (VI: 1, 3, 4, 6), SOTIR G. ELENA (VI: 1, 3, 4, 6, 8, 26), ZONFALY I. MARIA (VI: 1, 3, 4, 6, 26).

Liceul de fete „Regina Maria" București.

Clasa V-a: TĂNĂSESCU VENERA (VI: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 25).

Liceul de fete din Beiuș.

Clasa IV-a: LUCACIU ST. E. MARGARETA (IV: 1, 2, 4, 11).

Clasa VI-a: POMPEIU A. MARICA (VI: 1, 3, 4, 6, 8).

Liceul militar Craiova.

Clasa V-a: CIOC I. DUMITRU (V: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16).

Liceul militar „Ștefan cel Mare" Cernăuți.

Clasa IV-a: ALEXANDRESCU G. PAUL (IV: 10, 13, 15, 16), BOBULESCU A. (IV: 17), BREȚCANU C. CONST. (IV: 18), CAPRIȘ V. M. (IV: 17, 18), CĂPLESCU M. (IV: 16, 18), CONSTANTINESCU D. (IV: 16, 18), COSMA A. (IV: 10, 16), DANIIL G. L. (IV: 17), DOMBROVSCHI I. (IV: 18), GHEORGHIU M. I. (IV: 11, 16), JUGĂNARU P. (IV: 10, 16), MAREȘ M. (IV: 17), MATUȘ M. (IV: 18), METZ M. (IV: 10, 11, 16, 17, 18), PETROVICI C. (IV: 18), POPOVICI C. A. (IV: 16, 18), RĂDUCĂNESCU D. S. (IV: 10), ROTTA S. (IV: 18), STĂNESCU ST. V. (IV: 16), STOICESCU S. (IV: 17), TĂUTU N. (IV: 11, 16, 17, 18), VASILIU G. N. (IV: 10, 16).

Clasa V-a: APOSTOL G. N. (V: 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 21), ARHIPESCU M. C. (V: 10, 16, 18, 19, 20, 21), BĂNICĂ M. G. (V: 10, 11), BOSINCEANU D. G. (V: 10, 12), CIOCEANU C. A. (V: 10, 11, 12), CRUȚESCU T. (V: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21), DUMITRESCU V. (V: 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 20), FLOAREȘ A. (V: 10, 11, 12, 13, 14, 16, 18, 20, 21), LAZĂR AUREL (V: 10, 11, 12, 14, 16), MAREȘ D. P. (V: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21), MINACIU T. N. (V: 11, 14, 20), MITITELU S. C. (V: 10, 11, 13, 16, 18), NEDELCU V. N. (V: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21), NEGULESCU A. A. (V: 10, 12, 18), NICOLAESCU I. T. (V: 10, 11, 12), PĂRASCHIVESCU T. M. (V: 10, 11, 12, 14, 15), POPA C. B. (V: 10. 11, 12, 13, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 21), ROMANO V. M. (V: 10, 12), RUSSU I. E. (V: 10, 11, 12, 21), ȘTEFANOV P. S. (V: 10, 11, 12), STELIAN I. A. (V: 10, 11, 12, 18), TEODOREANU V. N. (V: 10, 11, 12, 13, 16, 18, 19, 20, 21), TOMESCU G. T. (V: 10, 11).

Clasa VII-a: BOITAN N. (VII: 13, 14, 17), CEHAN G. A. (VII: 1, 3, 8, 9), COSTINESCU D. E. (VII: 13, 14,) CRISTEA G. E. (VII: 13, 14), DUMITRESCU I. C. P. (VII: 13, 14), EMILIAN G. C. (VII: 17), MAFTEI C. (VII: 13, 14), MĂGALĂ I. G. (VII: 13, 14), MAXIM I. (VII: 17), MOCANU V. (VII: 13, 14), OPRAN C. (VII: 13, 14), ROMAN I. N. (VII: 13, 14, 16, 17), STĂNCIULESCU G. (VII: 13, 14), SURUMEI I. M. (VII: 13, 14), VUSATUIC D. M. (VII: 1, 3, 8, 9).

Liceul militar „Mihaiu Viteazul" Tg. Mureș.

Clasa IV-a: BEJENARU G. V. (IV: 4, 5, 6, 8), PĂUNESCU M. V. (IV: 4, 5, 6), SĂNDULESCU I. J. (IV: 1, 3).

Clasa V-a: BOBORODEA (V: 10, 12, 18, 19), BUTA G. S. (V: 10), CAPOTA G. G. (V: 2, 18), CRIȘAN HORIA (V: 2, 9, 14), DANIELESCU A. (V: 18, 20), GEORGESCU E. (V: 1, 2, 10), HAICU A. A. (V: 2), HORTOPAN GR. (V: 1, 2, 8), ISAC I. V. (V: 2, 9, 10, 18), MATEI D. V. (V: 2, 3, 10), MAXIM E. N. (V: 2, 9, 10), MOSORA N. N. (V: 2, 3), MUNTEANU V. L. (V: 6, 10, 12, 18, 20), MUREȘAN L. (V: 9, 10, 18, 19), PASCU V. V. (V: 1, 2, 9), ROMAN N. MOLDOVAN (V: 3, 10, 18), ROVENȚA O. O. (V: 3, 4, 10, 12, 18, 20), SCHOBEL V. V. (V: 10), STOICA T. L. (V: 18, 20), TOFAN T. (V: 2, 9, 10, 18), TOMA N. N. (V: 1, 2, 3, 9, 18), VASILE D. M. (V: 1, 18), VLAICU V. A. (V: 3), ZLATIAN P. C. C. (V: 1, 2).

Clasa VI-a: GREAB I. V. (VI: 13), MĂCIUCEANU D. P. (VI: 4), MARA C. M. (VI: 4), MATEI I. I. (VI: 6, 7, 13, 14. VII: 1) METEA S. V. (VI: 9), MORANU I. V. (VI: 2), STOIAN S. I. (VI: 3, 4, 5, 6, 8, 9. VII: 1), ȚIPU T. (VI: 4), VASU A. N. (VI: 5, 8, 9, 13, 14. VII: 1).

Liceul militar Iași.

Clasa V-a: BÂRCĂ G. G. (V: 2, 10, 11, 15, 18, 19, 20).

Liceul militar Chișinău.

Clasa VI-a: BULAT L. M. (VI: 26).

Clasa VII-a: FLORESCU G. H. (VII: 3, 4, 5, 7, 8, 9), MILLU I. N. (VII: 3, 4, 5, 7, 8, 9).

Liceul militar „Nicolae Filipescu", Mânăstirea Dealu.

Clasa IV-a: FLORESCU L. V. (IV: 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19. V: 10, 12, 18, 20, 21), RĂDULESCU G. O. (IV: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19. V: 3, 4, 6, 9, 10, 11, 20, 21. VI: 1).

Liceul „Samuil Vulcan" Beiuș.

Clasa IV-a: ALEXIU V. ARDELEAN (IV: 13, 14, 15, 16, 17, 18. 19). LAKATOS L. (IV: 2, 3, 5, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18).

Clasa V-a: BOLCAȘ P. I. (V: 1, 2, 3, 4, 9, 10, 13, 18, 20, 21), SILBERSTEIN S. VASILE (V: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20, 21), TEIUȘAN I. (V: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 21).

Clasa VI-a: CHIROIU V. (VI: 1, 4, 6, 8), HOMPOLA T. (VI: 1, 4, 6, 8. VII: 1).

Liceul Național Iași.

Clasa V-a: IONESCU M. C. (V: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9).

Liceul „Diaconovici Loga", Timişoara.

Clasa V-a: ALACI V. V. (V: 10, 26), POPESCU G. T. (V: 3, 10, 12)
Clasa VI-a: IOANNES DE APŞA V. V. (VI: 34).

Seminarul pedagogic „Titu Maiorescu", Bucureşti.

Clasa IV-a: BODNĂRESCU M. H. (IV: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 24, 25. V: 3. 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 26).
Clasa VII-a: KATZ H. R. F. (VII: 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), VARLAM M. T. (VII: 1, 3, 5, 8).

Liceul „Gh. Lazăr", Bucureşti.

Clasa IV-a: ANGHELESCU V. E. (IV: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 19).
Clasa V-a: APOSTOLESCU D. P. (V: 1, 2, 3, 4), DECUSARĂ E. N. (V: 1, 2), IONESCU V. GR. (V: 1, 2, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 18, 19, 24, 26. VI: 14), MUNROE M. M. (V: 1, 2, 3, 4, 5), STOICESCU C. C. (V: 10, 11, 12, 18, 21).
Clasa VI-a: BĂDULESCU M. (VI: 1, 8, 13, 15, 26, 27, 28, 34), BEGU I. S. (VI: 13, 26, 27, 28, 34), BĂZDOACĂ C. P. (VI: 26, 27, 28, 34), DRĂGHICESCU F. M. (VI: 7, 14, 26, 27, 28, 34. VII: 1) FILIPESCU D. (VI: 27, 28, 34), HAIER H. E. (VI: 15, 16), IORDACHE I. C. (VI: 2, 7, 13, 26, 27, 28. VII: 1) NICOLESCU V. A. (VI: 26, 27, 34), TRANDAFIRESCU C. C. I. (VI: 24, 27, 28, 34).

Liceul „Matei Basarab" Bucureşti.

Clasa IV-a: IACOBSOHN J. F. (IV: 10, 13, 14, 17, 21, 22).
Clasa V-a: FROIMESCU E. A. (V: 1, 2, 3, 7, 9), NICULESCU I. D. (V: 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 13), ŞAICHIN O. A. (V: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, VI: 3, 4, 26).
Clasa VI-a: SCHAPIRA M. J. (VI: 2, 3, 4, 5, 26), ŞTEINFELD M. (VI: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8).

Colegiul naţional „Sf. Sava" Bucureşti.

Clasa VII-a: NEAGU V. V. (VII: 3, 27, 28).

Elevi particulari, Bucureşti.

Clasa V-a: KILLNER G. (V: 1, 2, 3, 5, 6, 9).
Clasa VI-a: MECU I. M. (VI: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 18, VII: 6).

Liceul „Mihai Viteazul" Bucureşti.

Clasa IV-a: GROZDEA D. M. (IV: 2, 3, 8, 9), SERDICI V. G. (IV: 2, 3, 4).
Clasa V-a: BALLY L. N. (V: 1, 6, 10, 12), GROSS I. E. (V: 1, 6, 9, 10, 18), MATEI D. V. (V: 9), RAUCH L. J. (V: 1, 2, 6, 9, 10, 11, 18, 20).
Clasa VI-a: BEIU PALADI G. E. (VI: 26, 27, 28, 34).

Liceul „Spiru Haret" Bucureşti.

Clasa V-a: STĂNCIULESCU A. I. (V: 1, 2, 4, 5).

Liceul „Marele Voevod Mihai" Bucureşti.

Clasa VII-a: STOICA D. AL. (VII: 2, 13, 14, 18, 19, 20).

Liceul „Mihail Eminescu" Bucureşti.

Clasa V-a: BĂDULESCU V. V. (V: 26).

Liceul „Sft. Iosif" Bucureşti.

Clasa V-a: POPESCU N. A. (V: 24, 26, 28, 31, 32).
Clasa VII-a: ADOLF M. M. (VII: 11, 13).

Liceul „B. P. Haşdeu" Buzău.

Clasa IV-a: NICOLAU L. M. (IV: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21).
Clasa V-a: NICOLAU L. L. (V: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10).

Liceul „Tasse Dumitrescu" Mizil.

Clasa IV-a: BUZNEA C. R. (IV: 1, 2, 3, 4, 6, 7), GIAMBAŞU V. T. (IV: 1, 2, 3, 4, 6, 7), IONESCU I. T. (IV: 1, 2, 3, 4, 6, 7), MAZILU I. I. (IV: 1, 2, 3, 4, 6, 7), POPESCU M. A. (IV: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10), TEODORESCU D. C. (IV: 1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10).
Clasa V-a: BUTU I. (V: 1, 2, 3, 4, 5), FIANU G. (V: 1, 2, 3, 4, 5), IONIŢĂ D. M. (V: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10), NIŢESCU G. I. (V: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10), ŞTEFĂNESCU M. (V: 1, 2, 3, 4, 5), TOMA C. G. (V: 1, 2, 3, 4, 5), VOICULESCU S. I. (V: 1, 2, 3, 4, 5).
Clasa VII-a: CIUREA D. N. (VII: 1, 4), DINULESCU C. P. (VII: 1, 4), IOANIŢESCU GH. (VII: 1, 4).

Liceul „Unirea" Focşani.

Clasa IV-a: IOSIPESCU C. A. (IV: 1, 2, 3, 6, 7).

Liceul „N. Bălcescu" Brăila.

Clasa VII-a: GOLDENBERG M. E. (VII: 11, 13, 14).

Seminarul pedagogic Universitar Cluj.

Clasa IV-a: BORZA AL. AL. (IV: 1, 2, 3, 4, 5, 8), KAUNTZ I. I. (IV: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 19).

Seminarul pedagogic universitar Cernăuţi.

Clasa V-a: CAPRI V. A. (V: 10, 12, 13, 14, 18, 19, 20, 21, 22, 23), HERLING H. E. (10, 16, 18, 20, 21), NETEA S. A. (V: 10, 12, 17, 19), PETRIDES I. S. (V: 2, 6, 11, 16, 18, 19, 20, 21, 22), SEIDNER I. (V: 10), ŞERBANOVICI T. P. (V: 10, 16, 18, 20, 21, 22), WEISSELBERG M. M. (V: 10, 18).

EXERCIȚII PROPUSE

Clasa IV-a. *Exerc. 29.* Se notează cu AD și BC respectiv baza mică și baza mare ale unui trapez; E și F respectiv mijloacele laturilor neparalele AB și CD. Se ia punctul G pe baza mică astfel ca $\overline{BH} = \frac{\overline{BC}}{4}$. Să se arate că:

aria AEFD = aria ABHD.

C. I. B.

IV. 30. Un paralelogram ABCD are unghiul A de 120°, iar $AB = a$, $\overline{BC} = b$.

Să se calculeze aria dreptunghiului obținut ducând din A și C perpendiculare pe laturile BC și AD.

Să se calculeze această arie cu aproximația de 0,0001 când $a = 124$ m, $b = 108$ m.

C. I. B.

IV. 31. Să se calculeze suma

$$\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} - 2\,\frac{x^2+1}{x^2-1}.$$

G. T. G.

IV. 32. Să se verifice identitatea:

$$(a^2+b^2)(x^2-y^2) \equiv (ax+by)(ax-by)+(bx+ay)(bx-ay).$$

N. B.

IV. 33. Să se verifice identitatea:

$$(x-a)(x+b)+(x-b)(x+c)+(x-c)(x+d)+(x-d)(x+a)$$
$$\equiv (x+a)(x-b)+(x+b)(x-c)+(x+c)(x-d)+(x+d)(x-a).$$

C. I. B.

IV. 34. O cărămidă costă un leu și o jumătate de cărămidă, cât costă cărămida?

I. L.

IV. 35. Să se extragă rădăcina a patra, cu patru zecimale, a numărului 1935.

I. L.

IV. 36. O corabie este nevoită, din cauza vântului, să parcurgă distanța de 1000 km, dintre două puncte, în «zig-zag» cu unghiul de 90°, mergând porțiuni egale, astfel la sfârșitul ultimei porțiuni să ajungă chiar în punctul final.

Ce distanță totală parcurge corabia?

I. L.

IV. 37. Se dau în spațiu două plane P și Q trecând printr'o dreaptă D și un cerc O. Să se găsească pe cercul O două puncte M și N egal depărtate de planele P și Q. In ce caz cele două puncte sunt confundate? In ce caz problema este posibilă? In ce caz toate punctele cercului se bucură de proprietatea cerută? In ce caz avem două perechi de puncte M, N, adică patru puncte pe cerc care se bucură de proprietatea cerută?

O. N. Ț.

IV. 38. Dacă cercul O din problema precedentă să găsește într'un plan perpendicular pe dreapta D și are o rază dată R, cum trebue luat centrul său pentru ca să avem *un punct, două, trei* sau *patru puncte,* care să se bucure de proprietatea cerută?

O. N. Ț.

IV. 39. Se dau în spațiu două plane P și Q trecând printr'o dreaptă D și două puncte: A în planul P și B în planul Q. Cum trebue să fie așezată în spațiu dreapta AB, pentru ca perpendicularele AM și BN respectiv pe planele P și Q să fie două drepte din același plan?

O. N. Ț.

IV. 40. Se dau două plane paralele între ele P și Q, și un punct A exterior ambelor plane.

In planul P luăm două cercuri O, I și pe ele punctele M, N (M pe cercul O și N pe cercul I). Dreptele AO, AM, AI, AN întâlnesc planul Q respectiv în punctele O', M', I', N'. Se trage cercul cu centrul în O' și de rază $\overline{O'M'}$, și cercul cu centrul în I' de rază I'N', ambele așezate în planul Q. Să se arate că:

1°. Dacă cercurile date O și I sunt egale, cercurile O' și I' sunt deasemenea egale;

2°. Dacă cercurile O și I sunt exterioare unul altuia, cercurile O' și I' sunt deasemenea exterioare unul altuia.

3°. Dacă cercurile O şi I sunt tangente (în interior sau în afară), cercurile O' şi I' sunt în acelaş fel tangente;

4°. Dacă cercurile O şi I sunt secante, cercurile O' şi I' sunt asemenea secante;

5°. Dacă cercul I este interior cercului O, cercul I' este interior cercului O';

6°. Dacă cercurile O şi I sunt concentrice, cercurile O' şi I' sunt asemenea concentrice;

7°. Ce condiţiune trebue să îndeplinească razele cercurilor O şi I, pentru ca suma ariilor cercurilor O şi O' să fie egală cu suma ariilor cercurilor I şi I';

8°. Ce condiţiune trebue să îndeplinească punctul A, pentru ca cercurile O' şi I' să fie respectiv egale cu O şi I?

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 33.* Să se arate că expresia:
$(x+1)(y+1)(x-y)+(x+1)(y-1)(x+y)-(x-1)(y-1)(x-y)$
se devide cu produsul $(x-1)(y+1)(x+y)$ şi să se afle câtul.

N. B.

V. 34. Să se verifice identitatea:

$$\left(\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-c}{x-d}\right)\left(\frac{x+a}{x+b}+\frac{x+c}{x+d}\right)\equiv\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}+\frac{x^2-c^2}{x^2-d^2}\cdot\frac{x^2-b^2}{x^2-a^2}+\frac{x^2-d^2}{x^2-c^2}$$

C. I. B.

V. 35. Să se verifice identitatea:

$$\left(\frac{\frac{x-a}{x-b}+\frac{x-c}{x-d}}{\frac{x-b}{x-a}+\frac{x-d}{x-c}}\right)^2\equiv\frac{\left(\frac{x-a}{x-b}\right)^2+\left(\frac{x-c}{x-d}\right)^2}{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^2+\left(\frac{x-d}{x-c}\right)^2}$$

C. I. B.

V. 36. Să se verifice identitatea:

$$\left(\frac{\frac{x+a}{x+b}+\frac{x+c}{x+d}}{\frac{x+b}{x+a}+\frac{x+d}{x+c}}\right)^n\equiv\frac{\left(\frac{x+a}{x+b}\right)^n+\left(\frac{x+c}{x+d}\right)^n}{\left(\frac{x+b}{x+a}\right)^n+\left(\frac{x+d}{x+c}\right)^n},$$

n fiind un număr întreg. C. I. B.

V. 37. Să se verifice identitatea:

$$\frac{a+1}{a-1}+\frac{a^2+1}{a^2-1}-\frac{a^3-1}{a^3+1}=\frac{(a+1)(a^2+1)(a^3-1)}{(a-1)(a^2-1)(a^3+1)}.$$

N. B.

V. 38. Să se verifice identitatea:

$$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-1}{b+1}-\frac{(a-b)(b-1)(a-1)}{(a+b)(b+1)(a+1)}=\frac{a-1}{a+1}.$$

N. B.

V. 39. Să se arate că, dacă $x+y+z=0$, expresia:

$$(a+x)(b+y)(c+z)+(x+y-c)(y+z-a)(z+x-b)$$

se anulează, oricare ar fi cantitățile a, b, c.

N. B.

V. 40. Dacă $ab=cd$, avem egalitatea:

$$\frac{a-1}{a+1}+\frac{b-1}{b+1}-\frac{c-1}{c+1}-\frac{d-1}{d+1}=\frac{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)}\left[\frac{c+1}{c-1}+\frac{d+1}{d-1}-\frac{a+1}{a-1}-\frac{b+1}{b-1}\right].$$

N. B.

V. 41. In patrulaterul ABCD fie A', B', C', D' mijloacele laturilor, iar L, M: mijloacele diagonalelor. Să se arate că patrulaterele A'LC'M, B'LD'M sunt paralelograme.

N. B.

V. 42. Două paralelograme AMBN, CMDN au două vârfuri opuse comune. Să se arate că patrulaterul ABCD este paralelogram.

N. B.

V. 43. Să se construiască toate triunghiurile cu înălțimile corespunzătoare laturilor AB, AC: $h_c = 3$ cm, $h_b = 4{,}8$ cm, având ca latură BC un segment de dreaptă dat, a cărui lungime este 5 cm.

C. I. B.

V. 44. In triunghiul ABC, fie D un punct situat pe bisectoarea unghiului B. Paralelele duse prin D la BC şi AC întâlnesc laturile AB şi BC respectiv în punctele E şi F.

Dacă segmentale DE şi DF sunt egale, să se arate că triunghiul ABC este isoscel. C. I. B.

V. 45. Să se construiască toate triunghiurile având vârful A într'un punct dat, laturile AB şi AC, paralele cu laturile unui unghiu de 75^0 aflat într'un plan cu punctul A, iar înălţimile corespunzătoare laturilor $\overline{AB}$, $\overline{AC}$: $h_c = 3$ cm, $h_b = 3{,}5$ cm.

C. I. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 35.* Să se găsească logaritmul lui *10* în baza *11*.

G. T. G.

VI. 36. Să se găsească logaritmul lui 117649 în baza 7.

G. T. G.

VI. 37. Dobânda fiind compusă, capitalul definitiv al unei sume, depusă timp de n ani, cu procentul p, este A.

Cu ce procent să fie depusă aceeaşi sumă, pentru ca după un număr dublu de ani capitalul definitiv să fie acelaş. Aplicaţia $p = 11\%$.

C. I. B.

VI. 38. Să se determine pe cercul trigonometric, (a cărui rază este *unu*), arcul x pentru care

$$\sin x = \frac{\sqrt[4]{5}}{5}$$

folosindu-se în tot cursul soluţiunii numai metode grafice.

C. I. B.

VI. 39. Se ia pe cercul trigonometric, în primul cadran, arcele $AM = x$ şi $AM' = x'$ astfel ca

$$\overline{MN} = \sin x = \frac{\sqrt{7}}{3} \quad , \quad \overline{M'N'} = \sin x' = \frac{\sqrt{2}}{3} .$$

Să se arate că triunghiurile OMN , OM'N' sunt egale, O fiind centrul cercului trigonometric.

C. I. B.

VI. 40. Să se calculeze suma:

$$\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^n}+\frac{1}{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{n-1}}+\frac{1}{(a-b)^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{n-2}}+\ldots+\frac{1}{(a-b)^n}.$$

C. I. B.

VI. 41. Să se calculeze suma

$$\frac{\sqrt[m]{a^r}}{\sqrt[n]{b^r}}+\frac{\sqrt[m]{a^{r-1}}}{\sqrt[n]{b^{r+1}}}+\frac{\sqrt[m]{a^{r-2}}}{\sqrt[n]{b^{r+2}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[n]{b^{2r}}}.$$

Caz particular: $r=\frac{n}{2}$.

C. I. B.

VI. 42. Să se calculeze suma:

$$\frac{1}{\sqrt[m]{a^r}\cdot\sqrt[n]{b^r}}+\frac{1}{\sqrt[m]{a^{r+1}}\cdot\sqrt[n]{b^{r-1}}}+\frac{1}{\sqrt[m]{a^{r+2}}\cdot\sqrt[n]{b^{r-2}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[m]{a^{2r}}}.$$

Caz particular: $r=\frac{m}{2}$.

C. I. B.

VI. 43. Care este valoarea expresiunii:

$$E=\frac{\sqrt[6]{7\sqrt[8]{9\sqrt[10]{10}}}}{\sqrt[5]{4\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}}.$$

G. D. S.

VI. 44. Să se verifice egalitatea:

$$\sqrt{\frac{a^3\sqrt{a^6}}{\sqrt[6]{a^{10}}\cdot\sqrt[3]{a^4}}}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a^3}}{a^6}}=1.$$

C. I. B.

VI. 45. Să se verifice egalitatea:

$$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{8}}{64}} \cdot \sqrt{\frac{8\sqrt{4^3}}{\sqrt[6]{4^5} \cdot \sqrt[3]{16}}} = 1.$$

C. I. B.

VI. 46. Să se verifice egalitatea:

$$\sqrt[3]{\frac{125^2}{\sqrt{5^3}}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt[6]{25^5} \cdot \sqrt[3]{5^4}}{5^3 \cdot \sqrt{25^3}}} = \sqrt[3]{\frac{343^2}{\sqrt{7^3}}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt[6]{49^5} \cdot \sqrt[3]{7^4}}{7^3 \cdot \sqrt{49^3}}}.$$

C. I. B.

Clasa VII-a. *Exerc. 31.* Să se arate că polinomul:

$$(x+1)^7 - x^7 - 1$$

este de forma: $(x^2 + x + 1)\, Q(x)$, $Q(x)$ fiind un polinom de gradul al patrulea, care se divide cu $(x + 1)$.

G. T. G.

VII. 32. Să se determine coeficientul lui x^{25} din desvoltarea lui $(x + 1)^{30}$.

G. T. G.

VII. 33. Să se simplifice fracțiunea:

$$\frac{1^4 + 2^4 + \ldots + n^4}{1^5 + 2^5 + \ldots + n^5}.$$

G. T. G.

VII. 34. Să se verifice egalitatea:

$$\begin{vmatrix} \frac{b}{c} & \frac{c}{a} & \frac{a}{b} \\ a & b & c \\ \frac{c}{a} & \frac{a}{c} & \frac{b}{a} \end{vmatrix} = \frac{1}{2abc}\left[(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2\right].$$

C. I. B.

VII. 35. Să se calculeze valoarea determinantului:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{b}{c} & \frac{c}{b} \\ \frac{a}{c} & 1 & \frac{c}{a} \\ \frac{a}{b} & \frac{b}{a} & 1 \end{vmatrix},$$

știind că $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$

G. D. S.

VII. 36. Să se verifice egalitatea:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}^2 a & \operatorname{cotg} a & \operatorname{cotg} a \\ 1 & \operatorname{tg} a & \operatorname{cotg} a \\ \operatorname{cotg}^2 a & \operatorname{cotg} a & \operatorname{tg} a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{cotg}^2 a & \operatorname{tg} a & \operatorname{tg} a \\ 1 & \operatorname{cotg} a & \operatorname{tg} a \\ \operatorname{tg}^2 a & \operatorname{tg} a & \operatorname{cotg} a \end{vmatrix}.$$

C. I. B.

VII. 37. Să se arate că:

$$2[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2-(a+b)(b+c)\cdot$$
$$-(a+b)(c+d)-(b+c)(c+d)]^2$$
$$=\tfrac{1}{2}[(b-d)^2+(c+d-a-b)^2+(a-c)^2]^2$$
$$=(b-d)^4+(c+d-a-b)^4+(a-c)^4.$$

I. L.

VII. 38. Să se arate că:

$$(a-2c-d)^3-(a+d)^3+(d-a)^3+(a+2b+2c+d)^3$$
$$=24(a+b)(b+c)(c+d).$$

I. L.

Soluțiile exercițiilor propuse se vor redacta conform instrucțiunilor publicate în No. 1, pag. 8 și se primesc timp de 3 luni dela data propunerii lor.

Nu se primesc exerciții propuse decât dela redactorii „Gazetei Matematice".

Abonamentul se face numai pe întregul an școlar și se plătește înainte.

Drepturile de reproducere sunt rezervate Societății „Gazeta Matematică".

BIBLIOTECA
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

D 15

BIBLIOTECA CENTRALA
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL I. No. 5 — 1 FEVRUARIE 1935

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii, abonamente şi orice corespondenţă pe adresa:
Lt.-Comandor GR. ZAPAN

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

IV. 20. Am făcut o înmulţire şi am oprit dela calcul numai cifra 5, iar celelalte le-am înlocuit cu *.

Calculul se reprezintă astfel:

$$\begin{array}{r} 5\,*\,* \\ 5\,*\,* \\ \hline 5\,*\,* \\ *\,*\,5\,* \\ *\,*\,*\,5 \\ \hline *\,*\,*\,5\,*\,* \end{array}$$

Să se restabilească înmulţirea.

I. I.

Soluţiile sunt: *a)* 527×521; *b)* 539×541; *c)* 539×591; 563×541.

V. 22. Pe dreptele O_x, O_y, O_z, care sunt două câte două perpendiculare, se consideră respectiv punctele A, B, C astfel încât $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$.

Să se arate că:

$$\text{aria } ABC = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}.$$

C. I. B.

Fie D piciorul perpendicularei dusă din O pe AB. După teorema celor 3 perpendiculare, CD este de asemenea perpendiculară pe AB, deci înălțime a triunghiului ABC.

$$\overline{AB} = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad \overline{OD} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

pentrucă

$$2 \times \text{aria } OAB = \overline{OD} \times \overline{AB} = \overline{OA} \times \overline{OB}.$$

Din triunghiul dreptunghiu COD,

$$\overline{CD} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

$$\text{aria } ABC = \tfrac{1}{2}\, AB \times CD = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}.$$

V. 23. Pe dreptele O_x, O_y, O_z perpendiculare între ele, se consideră punctele A, B, C astfel încât $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$.

Să se arate că lungimea înălțimei $\overline{OH}$ a piramidei OABC este dată de formula:

$$\overline{OH} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}.$$

C. I. B.

$$\text{Volumul } OABC = \tfrac{1}{3} \text{ aria } OAB \times \overline{OC} = \frac{abc}{6}$$

$$\overline{OH} = \frac{3 \text{ Vol. } OABC}{\text{aria } ABC} = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

pentrucă aria $ABC = \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$ din V. 22.

VI. 17. Se consideră un patrulater convex sau concav ABCD. Fie O punctul de întâlnire al diagonalelor AC, BD, iar R_1, R_2, R_3, R_4 respectiv razele cercurilor circumscrise triunghiurilor AOB, BOC, COA, DOA. Să se arate că dacă una din relațiunile

$$R_1 \pm R_2 = R_3 \pm R_4$$

este îndeplinită, atunci patrulaterul este circumscris unui cerc.

N. B.

Se cunoaște proprietatea:

«Condiția necesară și suficientă ca un patrulater, convex sau concav, să aibă laturile tangente la un cerc, este ca suma a două laturi oarecare să fie egală cu suma celorlalte două laturi».

(Cetitorii care se interesează de această proprietate simplă şi nu o pot demonstra singuri, pot găsi o discuţie amănunţită a ei într'un articol apărut în «Revista Matematică» din Timişoara Anul VI, Nr. 2).

Vom arăta că relaţia dintre raze a problemei se reduce la relaţia de mai sus dintre laturi.

Fie O_1, O_2, O_3, O_4 centrele cercurilor AOB, BOC, COD, DOA de raze R_1, R_2, R_3, R_4 iar P_1, P_2, P_3, P_4 simetricele punctului O în raport cu centrele O_1, O_2, O_3, O_4. Patrulaterele $O_1O_2O_3O_4$, $P_1P_2P_3P_4$ sunt paralelograme iar punctele A, B, C, D sunt proiecţiile punctului O respectiv pe laturile P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4P_1 ale paralelogramului $P_1P_2P_3P_4$. Egalităţi de unghiuri rezultând din patrulaterele inscriptibile OAP_1B, OBP_2C, OAP_4D, OCP_3D ne arată că perechile de triunghiuri (ABC, OP_1P_2), (ADC, P_3OP_4) sunt asemenea. Rezultă egalităţile:

$$\frac{AB}{OP_1} = \frac{BC}{OP_2} = \frac{AC}{P_1P_2} = k \quad , \quad \frac{CD}{OP_3} = \frac{AD}{OP_4} = \frac{AC}{P_3P_4} = k.$$

din care deducem:

$$\frac{AB}{R_1} = \frac{BC}{R_2} = \frac{CD}{R_3} = \frac{DA}{R_4} = 2k$$

şi dacă avem relaţia:

$$AB \pm BC = CD \pm DA$$

vom avea şi relaţia:

$$R_1 \pm R_2 = R_3 \pm R_4$$

şi reciproc.

VI. 22. Înălţimile AA', BB', CC' ale triunghiului ABC se întâlnesc în punctul H. Un cerc trecând prin H întâlneşte înălţimile în A", B", C".

Se poartă pe înălţimi dela vârfuri lungimile AA_1, BB_1, CC_1 egale şi de acelaşi sens cu dublul segmentelor $\overline{A''A'}$, $\overline{B''B'}$, $\overline{C''C'}$.

Se poartă pe înălţimi, din punctele A', B', C' lungimile $A'A_2$, $B'B_2$, $C'C_2$ egale şi de acelaşi sens cu jumătăţile segmentelor $\overline{A''A}$, $\overline{B''B}$, $\overline{C''C}$.

Să se arate că cercurile $A_1B_1C_1$ şi $A_2B_2C_2$ trec prin H.

N. B.

Fie *a, b, c,* mărimile laturilor triunghiului ABC, h_a, h_b, h_c lungimile înălţimilor, S aria triunghiului.

Se consideră punctul M diametral opusul lui H în centrul HA″B″C″ şi fie d_a, d_b, d_c distanţele punctului M la laturile triunghiului. Avem relaţia:

(1) $$ad_a + bd_b + cd_c = 2S$$

şi punctele A″, B″, C″ sunt proiecţiile lui M pe înălţimile AA′, BB′, CC′.

Există în plan un punct N ale cărui distanţe la laturile triunghiului sunt $(h_a - 2d_a)$, $(h_b - 2d_b)$, $(h_c - 2d_c)$, deoarece:

(2) $$(h_a - 2d_a)\,a + (h_b - 2d_b)\,b + (h_c - 2d_c)\,c = 2S$$

relaţie ce rezultă din (1) şi din relaţiile:

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2S.$$

Punctele A_1, B_1, C_1 sunt proiecţiile lui N pe înălţimi; deci se găsesc pe cercul descris pe NH ca diametru.

Analog din relaţia:

(3) $$\left(\frac{h_a - d_a}{2}\right) a + \left(\frac{h_b - d_b}{2}\right) b + \left(\frac{h_c - d_c}{2}\right) c = 2S$$

se deduce că punctele A_2, B_2, C_2 se află pe un cerc trecând prin H.

VII. 10. A şi B fiind două puncte fixe, iar O mijlocul segmentului $\overline{AB}$, să se găsească locul geometric al punctelor M pentru care

$$\sin AMO = k \sin OMB$$

k fiind o constantă. C. I. B.

Fie M un punct al locului geometric.

$$\sin AMO = \frac{\overline{AO}\,\sin AOM}{\overline{AM}}, \quad \sin OMB = \frac{\overline{OB}\,\sin BOM}{\overline{BM}}.$$

Deci $$\frac{\sin AMO}{\sin OMB} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}}.$$

Problema se reduce la aflarea locului geometric al punctelor pentru care distanţele la A şi B sunt în raportul $\frac{1}{k}$. Locul geometric este un cerc având ca diametru segmentul format de punctele ce împart segmentul AB interior şi exterior în raportul $\frac{1}{k}$.

Se consideră punctul M diametral opusul lui H în centrul HA″B″C″ şi fie d_a, d_b, d_c distanţele punctului M la laturile triunghiului. Avem relaţia:

(1) $$ad_a + bd_b + cd_c = 2S$$

şi punctele A″, B″, C″ sunt proiecţiile lui M pe înălţimile AA′, BB′, CC′.

Există în plan un punct N ale cărui distanţe la laturile triunghiului sunt $(h_a - 2d_a)$, $(h_b - 2d_b)$, $(h_c - 2d_c)$, deoarece:

(2) $$(h_a - 2d_a)\,a + (h_b - 2d_b)\,b + (h_c - 2d_c)\,c = 2S$$

relaţie ce rezultă din (1) şi din relaţiile:

$$ah_a = bh_b = ch_c = 2S.$$

Punctele A_1, B_1, C_1 sunt proiecţiile lui N pe înălţimi; deci se găsesc pe cercul descris pe NH ca diametru.

Analog din relaţia:

(3) $$\left(\frac{h_a - d_a}{2}\right) a + \left(\frac{h_b - d_b}{2}\right) b + \left(\frac{h_c - d_c}{2}\right) c = 2S$$

se deduce că punctele A_2, B_2, C_2 se află pe un cerc trecând prin H.

VII. 10. A şi B fiind două puncte fixe, iar O mijlocul segmentului $\overline{AB}$, să se găsească locul geometric al punctelor M pentru care

$$\sin AMO = k \sin OMB$$

k fiind o constantă. C. I. B.

Fie M un punct al locului geometric.

$$\sin AMO = \frac{\overline{AO}\,\sin AOM}{\overline{AM}}, \quad \sin OMB = \frac{\overline{OB}\,\sin BOM}{\overline{BM}}.$$

Deci $$\frac{\sin AMO}{\sin OMB} = \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}}.$$

Problema se reduce la aflarea locului geometric al punctelor pentru care distanţele la A şi B sunt în raportul $\frac{1}{k}$. Locul geometric este un cerc având ca diametru segmentul format de punctele ce împart segmentul AB interior şi exterior în raportul $\frac{1}{k}$.

S'au primit soluţii bune dela [1]) .

Şcoala Centrală de fete „Marica Brâncoveanu" Bucureşti.

Clasa IV-a: ALEXE C. LUCIA (IV : 1, 2, 7, 8, 9, 10, 16*, 17, 18, 19*, 20 d), BUCESCU YVONA (IV : 1, 3*, 6, 7, 8, 9, 10, 18. 19*), CHIRIŢESCU P. CORA (IV : 10, 13, 16*, 17, 18*, 19*, 20 a), CRISTEA M. ELENA (IV : 1, 2, 3, 5, 6, 20 a), DUMITRESCU JEANA (IV : 20 a), IONESCU FLORICA (IV : 2, 3, 6, 7, 8, 10, 17, 20 d), IONESCU I. MARIA NINA (IV : 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 17, 18*, 19*), NICOLAU A. ELENA (IV : 10, 18, 20 a), STOICA I. MARIA (IV : 8, 9, 10, 16*, 18*, 19*, 20 a), VASILESCU A. PAULA (IV : 8, 10), VETTU I. PAULINA (IV : 3, 9, 20 a).

Clasa V-a: OPRIŞ V. EMILIA (V : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 18), PORUMBARU V. OLGA (V : 1, 2, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 12, 14, 16*, 18, 19), ROMAŞCAN G. GEORGETA (V : 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 22), STĂNESCU N. VIRGINIA (V : 1, 2, 3, 4, 5, 9, 10, 14, 24, 26), SUFRIN ANA (V : 1, 2, 3*, 4, 6, 9), TROFIN AURORA (V : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 11, 14, 18, 26).

Clasa VI-a: MAZILU C. DACIA (VI : 1, 2, 3, 4, 26), PERKER A. LOLLA (VI : 1, 6, 26. VII : 5, 6), ZAHARIA D. BIANCA (VI : 1, 2, 3, 4, 26).

Liceul de fete „Regina Maria" Bucureşti.

Clasa VI-a: TĂNĂSESCU V. VENERA (VI : 23*, 24*, 26, 27, 28*, 29, 30, 31, 33, 34, 38. VII : 22).

Liceul de fete „Domniţa Ileana" Bucureşti.

Clasa IV-a; BĂDULESCU V. VIORICA (IV : 1, 2, 3, 5, 6, 7, 16, 18, 20 abd, 24, 26. V : 8, 29, 30), ERBLICH D. ELSA (IV : 1, 2, 3, 7, 8, 9), FLORICICĂ ST. ELENA (IV : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8*, 9*), NĂNĂU G. MARGARETA (IV : 1, 2, 3, 5, 6), SPÂNIŞTEANU VIORICA (IV : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8*).

Clasa V-a: MANOLACHE C. LIANA (V : 1, 2, 3, 6, 9).

Clasa VIa: PUTINEANU ECATERINA (VI : 4, 8. VII : 1), RUSEI ANA (VI : 2, 4, 5, 8, 12, 26*), ŞTEFĂNESCU P. AURORA (VI : 4. VII : 1).

Clasa VII-a: ANGHELESCU VIRGINIA (VII : 14).

Institutul Ortodox Internat Bucureşti.

Clasa IV-a: FIEROIU GR. MIOARA (IV : 2, 3, 6, 7, 8, 18, 19, 20 d), NEGULESCU A. L. MARIE (IV : 1, 2, 5, 6, 7, 16*, 20 d, 24, 26), OTETELIŞANU RUXANDRA (IV : 2, 3, 5, 6, 7, 13, 26), VASILIU C. ADRIANA (IV : 1, 2, 7, 20 d, 21).

Clasa V-a: CARTOJAN N. LAETITIA MARGARETA (V : 1, 3).

Externatul secundar „Zoe Râmniceanu" Bucureşti.

Clasa VIa: LAZAROVICI J. ROZICA (VI : 1, 3, 4, 6, 21, 26, 27, 34), ROCIU I. MARGARETA (VI : 3, 4, 26, 27*).

Institutul Moteanu Bucureşti.

Clasa III-a: MUNROE M. MANUELA (IV : 1, 2, 3, 5*, 6*, 11, 12, 13*, 14*, 15*, 26. VI : 4).

Clasa V-a: IACOBESCU SP. LUCIA (V : 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30).

---

1) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu rezolvat foarte bine.

Institutul Bolintineanu Bucureşti.

Clasa IV-a: BANCIU STELLA (IV: 21, 24, 26), OPREA IOANA (IV: 24, 25).

Liceul de fete „Carmen Sylva" Bucureşti.

Clasa I-a: STAMATESCU G. ILEANA (IV: 1).

Liceul de fete „Samuil Vulcan" Beiuş.

Clasa IV-a: LUCACI ST. MARGARETA ELISABETA (IV: 20 a).

Clasa VI-a: POMPEIU A. MARICA (VI: 26, 27, 34. VII: 1).

Liceul militar „Ştefan cel Mare" Cernăuţi.

Clasa IV-a: ALEXANDRESCU S. P. (IV: 20 a), BREŢCANU C. C. (IV: 20 a), CAPRIŞ G. M. (20 ad), COPLESCU M. (IV: 20 ab), COSMA A. (IV: 20 ab), DAMBOWSCHI I. (IV: 20 a), METZ M. (IV: 20 ad), MATIEŞ M. (IV: 20 d), PATRICHI C. V. (IV: 20 ad), POPOVICI C. A. (IV: 20 abd), TĂUTU N. (IV: 20 abd), TROFIN C. (IV: 20 abd), VASILIU C. N. (IV: 20 abd).

Liceul Militar „Mihai Viteazul" Tg.-Mureş.

Clasa II-a: VASILIU C. D. (IV: 5).

Clasa III-a: MILITARU A. (IV: 26), ZEVELEANU G. G. (IV: 26).

Clasa IV-a: SĂNDULESCU I. I. (IV: 21), ŞTEFĂNESCU A. (IV: 21), STOIAN V. M. (IV: 18, 21, 26), TĂTARU N. (IV: 21, 26).

Clasa V-a: MOSORA N. N. (V: 10, 13), SECHEL T. M. (V: 1, 4), TOMA N. N. (V: 3, 4).

Clasa VI-a: BUCURENCIU I. V. (VI: 12, 13, 26*, 27, 28*, 34), CHIREA A. I. (VI: 27, 34), CRISTESCU I. G. (VI: 12), MĂCIUCEANU D. P. (VI: 4), MATEI I. I. (VI: 8, 26, 27*, 28, 34), POP G. ŞT. (VI: 26, 27, 28, 34), STOIAN S. I. (VI: 14, 26*, 27*, 28*, 34), VASU A. N. (VI: 21, 26, 27, 34).

Clasa VII: ŢARĂLUNGĂ G. D. (VII: 3, 4, 9).

Liceul militar „Nicolae Filipescu" Mânăstirea Dealul.

Clasa V-a: BELLOIU B. D. (V: 1, 2, 6, 9, 10, 18, 20, 21, 29, 30, 32. VI: 4, 26, 34).

Liceul militar Iaşi

Clasa VI-a: BOGZA V. (VI: 8, 12, 14, 20, 21, 26, 27, 29, 30*, 33*, 34. VII: 3, 7), BUCUR V. (VI: 8, 13, 14, 20, 21, 26, 27, 30*, 33*, 34. VII: 7), COSTESCU C. (VI: 8, 12, 14, 20, 21, 26, 27, 30*, 33*, 34. VII: 1, 3, 7), DIMITRIU C. I. C. (VI: 14. VII: 3), DUMBRĂVESCU GR. D. (VI: 8, 14, 21. VII: 3).

Liceul militar „Regele Ferdinand" Chişinău.

Clasa V-a: MIHĂILEŞCU D. C. (V: 25), PĂDUREŢ A. V. (V: 16, 19, 30*), SCABIOLA G. (V: 18, 26, 28, 30*).

Clasa VII-a: FLORESCU G. H. (VII: 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 13, 14, 22*, 26*, 27, 28), MILLU I. N. (1, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 14).

Liceul militar „D. A. Sturza" Craiova.

Clasa V-a: BOIAN D. E. (V: 10, 13, 18, 19), CIOC I. D. (V: 17, 18, 19. VI: 10*, 12*, 13, 14, 20*, 21. VII: 14), PAŞOI N. M. (V: 10, 11, 12, 13, 16, 18, 20, 21).

Liceul „Samuil Vulcan" Beiuş.

Clasa IV-a: ARDELEAN V. ALEXIU (IV: 21, 24, 25, 26. V: 26. VI: 26), JIDANU I. C. (IV: 21, 24, 26. VI: 26), LAKATOS I. L. (IV: 20 d, 21, 24, 25, 26, 32. VI: 26).

Clasa V-a: BOLCAŞ P. I. (V: 24, 26, 29, 30*. VI: 26), HERA V. I. (V: 24, 26, 31. VI: 26), KILLNER G. (V: 26, 28, 29, 30*. VI: 26*), MEZEA M. G. (V: 24, 26. VI: 26), SILBERSTEIN V. (V: 24, 25, 26, 29, 30*, 31, 32. VI: 26, 27, 28*), TEIUŞAN I. (V: 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31. VI: 26, 28).

Clasa VI-a: CHIRVOIU V. (VI: 26, 27, 34).

Seminarul Pedagogic Cluj.

Clasa IV-a: FLORIAN T. T. (IV: 21, 24, 25, 26).

Clasa VI-a: GHEORGHESCU G. C. (VI: 2, 4, 6, 34).

Liceul „Gh. Barițiu" Cluj.

Clasa V: NIȚESCU C. G. (V: 25, 26*, 27*, 28*, 29*, 30*. VI: 26*, 27*, 28*, 30*, 31*, 32*, 33*, 34).

Liceul „Constantin Diaconovici Loga" Timişoara.

Clasa V-a: KISS I. A. (V: 26, 27, 28, 29, 30), MORARIU O. T. (V: 1, 4, 5, 10, 26, 29, 30), POPESCU G. T. (V: 26, 32. VI: 27).

Liceul Național Iași.

Clasa V-a: IONESCU M. C. (V: 10, 11, 12, 13, 15, 18, 19, 20, 21*, 22, 23*).

Liceul „Unirea" Focşani.

Clasa IV-a: IOSIPESCU C. A. (IV: 4, 5, 8, 16, 21*, 24), TURTOIU F. (IV: 1, 2, 3, 6, 7).

Clasa V-a: NADOLU A. (V: 10, 11, 12, 13, 18, 19, 26).

Liceul „Tasse Dumitrescu" Mizil.

Clasa V-a: FIANU G. (V: 6, 7, 8, 9), ŞTEFĂNESCU M. (V: 6, 7, 8, 9), VOICULESCU I. (V: 6, 7, 8, 9).

Liceul „Dinicu Golescu" Câmpu-Lung Muscel.

Clasa VII-a: POPESCU V. FL. (VII: 26, 27).

Seminarul Pedagogic Bucureşti.

Clasa IV-a: BODNĂRESCU M. H. (IV: 20 abd, 21, 22, 23, 27*, 28*. V: 1, 24, 25, 31, 32*. VI: 26).

Liceul „Gh. Lazăr" Bucureşti".

Clasa IV-a. MIULESCU G. M. (IV: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 12*, 13, 14, 15, 16*, 18*, 19*, 21, 22, 23, 24, 25, 26*).

Clasa V-a: DROUHET E. ED. (V: 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 18, 24, 26), MUNROE M. M. (V: 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 16*, 17, 18, 19, 20, 21*, 22*, 23*).

Clasa VI-a: BĂDULESCU M. (VI: 27*, 28, 34, 44, 45), BÂZDOACĂ P. (VI: 28*, 34, 35, 36, 44), BEGU I. ST. (VI: 10), BREZEANU D. O. (VI: 26, 27, 35, 36, 44, 45), DRĂGHICESCU F. M. (VI: 14, 26, 27, 28, 34, 35, 36, 44, 45*, 46. VII: 32, 35*), FILIPESCU D. (VI: 27, 28, 34), IORDACHE I. C. (VI: 16, 35, 36, 43, 44*, 45, 46*), LUPAŞCU M. A. O. (VI: 26, 44), SCHRAMM F. B. (VI: 26, 27, 29, 30*, 36*, 45, 46), TRANDAFIRESCU C. I. (VI: 27*, 28*, 34).

Clasa VII-a: CHIRICUŢĂ T. I. (VII: 3, 5, 13).

Liceul „Matei Basarab" Bucureşti.

Clasa IV-a: HORODNICEANU I. S. (IV: 4, 6, 8).

Clasa V-a: CHIRIACESCU N. (V: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 18, 19, 26. VI: 26), NICULESCU I. D. (V: 26, 27, 28, 31, 32. VI: 26, 27*), PRECIADO I. T. (V: 2, 3, 4, 6, 8, 9), ŞAICHIN O. A. (V: 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 32. VI: 26, 27*, 28*, 34),

Clasa VI-a: GREGORE S. A. (VI: 1, 2, 3, 4, 12).

Colegiul naţional „Sf. Sava" Bucureşti.

Clasa IV-a: CIURESCU I. R. (IV: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9), ENESCU E. M. (IV: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 20 abc, 24), PÂRVULESCU O. (IV: 1, 2, 3, 7), POPESCU C. H. (IV: 1, 2, 3, 5, 7, 8).

Clasa VII-a: NEAGU V. V. (VII: 29).

Liceul „Mihai Viteazul" Bucureşti.

Clasa IV-a: CÂRNARU I. D. (IV: 2, 3, 6), HOREZEANU M. S. (IV: 1).

Clasa V-a: BALLY L. N. (V: 2, 9, 24), GROSS I. E. (V: 26, 27, 29), STĂNESCU G. T. (V: 10, 18), STRUŢEANU S. M. (V: 10, 11, 12, 13, 18, 20).

Clasa VI-a: CRISTESCU I. G. (VI: 26, 27, 34), RĂGĂLIE N. I. (VI: 26, 27, 34).

Elevi particulari Bucureşti.

Clasa II-a: MALAXA N. C. (IV: 1, 3, 5*, 6, 26).

Clasa VII-a: GAFENCU AL. N. (VII: 22, 26, 27, 28).

Liceul „Cantemir Vodă" Bucureşti.

Clasa V-a: STAMATESCU C. I. (V: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9).

Clasa VI-a: GEORGESCU N. N. (VI: 1, 2, 3, 4, 5, 26, 34).

Liceul „Spiru Haret" Bucureşti.

Clasa VI-a: ANGELESCU I. C. (VI: 26, 27*, 34).

Liceul „Mihail Eminescu" Bucureşti.

Clasa V-a: BĂDULESCU V. V. (V: 27, 28, 29).

Liceul „Marele Voevod Mihai" Bucureşti.

Clasa IV-a: SCHWARZ M. Y. (IV: 4, 7, 21*, 22, 23, 24. V: 26, 28).

Clasa VII-a: STOICA D. AL. (VII: 22*, 24, 25*, 26*, 27*, 29).

Liceul „Aurel Vlaicu" Bucureşti.

Clasa IV-a: FULGA L. T. (IV: 10, 11, 12*, 13*, 14*, 15*, 16*, 18, 19, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27).

Clasa VII-a: VASILE STAN IOAN (VII: 26, 27).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti,

Clasa IV-a: GELLER L. M. (IV: 13, 14, 15, 16), IONESCU T. T. (IV: 10, 11, 16*, 23).

Clasa V-a: POPESCU N. A. (V: 25, 27, 29, 30).

Clasa VII-a: RETZI N. A. (VII: 22*, 26, 27).

Liceul Sf. Gheorghe" Bucureşti.

Clasa VII-a: EFTIMIU V. T. (VII: 22*, 26*, 27).

Liceul „Sf. Andrei" Bucureşti.

Clasa VI-a: GLASBERG A. M. (VI: 4, 6, 26, 27, 34).

EXERCIŢII PROPUSE

Clasa IV-a. *Exerc. 41.* Să se verifice identitatea:

$$a(b-c)[(a+b+c)(2a-b-c)+3(bc-a^2)]$$
$$+b(c-a)[(a+b+c)(2b-c-a)+3(ca-b^2)]$$
$$+c(a-b)[(a+b+c)(2c-a-b)+3(ab-c^2)]\equiv 0.$$

N. B.

IV. 42. Să considerăm un triunghiu ABC, astfel ca mijlocul M al lui $\overline{BC}$ este egal depărtat de A şi B. Prin C ducem un plan P perpendicular pe dreapta AC şi un plan R perpendicular pe MC. Fie MN dreapta de intersecţie a planelor P şi R. Să se arate, că dreapta AB este perpendiculară pe planul determinat de dreptele AC şi MN.

O. N. Ţ.

IV. 43. Să considerăm patru puncte A, B, C, D neaşezate în acelaşi plan (adică formând un tetraedru) şi un punct O exterior faţă cu toate planele determinate de ele. Fie *a* proiecţiunea punctului O pe planul BCD (adică piciorul perpendicularei duse din O pe planul BCD); *b* proiecţiunea punctului O pe planul CDA; *c* proiecţiunea punctului O pe planul DAB; *d* proiecţiunea punctului O pe planul ABC.

Să se arate că perechile de drepte: (*ab* , CD); (*ac* , BD); (*ad* , BC); (*bc* , AD); (*bd* , AC); (*cd* , AB) reprezintă fiecare în parte direcţiuni perpendiculare.

O. N. Ţ.

IV 44. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$x - \frac{x}{3} + \frac{x}{5} - \frac{x}{7} + \frac{x}{11} - \frac{x}{13} = \frac{2}{3} + \frac{6}{105} + \frac{10}{715}.$$

O. N. Ţ.

IV. 45. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$x + \frac{2x}{15} + \frac{4x}{70} + \frac{8x}{252} = \frac{99}{81}.$$

O. N. Ţ.

IV. 46. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$-\frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{6} + \frac{x+3}{12} + \frac{x-4}{20} = \frac{1}{60}.$$

O. N. Ţ.

IV. 47. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$x(x+1) - (x+1)(x+2) + (x+2)(x+3) - (x+3)(x+4)$$
$$+ (x+4)(x+5) - (x+5)(x+6) = (x-1)(x-2) - (x-2)(x-3)$$
$$+ (x-3)(x-4) - (x-4)(x-5) + (x-5)(x-6) - (x-6)(x-7).$$

Să se verifice soluţiunea aflată.

O. N. Ţ.

IV. 48. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x-3}{4} + \frac{x-5}{6} = \frac{x+2}{3} - \frac{x+4}{6} + \frac{x+6}{9}$$

şi să se verifice soluţiunea aflată.

O. N. Ţ.

IV. 49. Să considerăm o dreaptă D în spaţiu şi pe ea un punct O. Ducem un segment oarecare $\overline{OA}$, care să facă cu D un unghiu de 60^0, iar în punctul A ducem un plan R perpendicular pe OA. Dreapta D înţeapă planul R în punctul B. Prelungim segmentul $\overline{BO}$ cu un segment $\overline{OC}$ egal cu $\overline{OA}$. Prin punctele A, B, C ducem planele P, P′, P″ perpendiculare pe dreapta D. Să se arate, că planele P′, P, P″ determină pe orice dreaptă, care le întâlneşte, două segmente egale.

O. N. Ţ.

IV. 50. Să considerăm patru puncte în spaţiu: A, B, C, D, astfel ca $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD}$.

Să se arate că acele patru puncte nu sunt aşezate în acelaş plan.

Dacă luăm pe laturile triunghiului BCD şi în acelaşi sens punctele B', C', D' astfel ca să avem $\overline{BB'} = \overline{CC'} = \overline{DD'}$ şi însemnăm cu O centrul cercului B'C'D', să se arate, că dreapta AO este perpendiculară pe planul BCD.

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 46.* Să se arate, că

$$\frac{ab\,(ab+a+b)-(a+b+1)}{a^2b^2-a^2-b^2+1} = \frac{a^2b^2-2ab+1}{ab\,(ab-a-b)+a+b-1}.$$

N. B.

V. 47. Să se arate că expresiunea

$$(x+y)\,(y+z)\,(z+x)+xyz$$

se divide cu $x+y+z$ şi să se afle câtul.

N. B.

V. 48. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$ab\,(c-d)^3\,(x-b)+bc\,(a-b)^2\,(b-c)\,(x-d)+c\,(b-d)^3\,(c-a)\,x+$$
$$+(a-b)\,(b-c)\,(c-a)\,(bcx-d^3)=0.$$

N. B.

V. 49. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$a\,(b-c)\,[(2a-b-c)\,x+bc-a^2]+b\,(c-a)\,[(2b-c-a)\,x+ca-b^2]$$
$$+c\,(a-b)\,[(2c-a-b)\,x+ab-c^2]=0.$$

N. B.

V. 50. Să se rexolve sistemul

$$ax+by=c\ ,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{1}{c}.$$

N. B.

V. 51. Să se rezolve sistemul

$$\frac{x+y}{c} = \frac{y+z}{a} = \frac{z+x}{b}$$

$$ax + by - cz = \frac{1}{a+b-c}.$$

C. I. B.

V. 52. Să se rezolve inecuaţiunea:

$$0 < \frac{5x+7}{2x+3} < 1.$$

C. I. B.

V. 53. Fie A unul din punctele comune a două cercuri O_1 şi O_2; punctele B şi C diametral opuse lui A în aceste cercuri; L mijlocul segmentului $\overline{BC}$; M şi N punctele în care o dreaptă oarecare trecând prin A întâlneşte cele două cercuri.

Să se arate, că L este egal depărtat de punctele M şi N.

N. B.

V. 54. Se consideră două triunghiuri ABC, A'B'C' în acelaş plan, astfel ca: $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, AB perpendicular pe A'B'; AC perpendicular pe A'C', unghiurile BAC şi B'A'C' fiind suplementare.

Să se arate, că perpendiculara coborîtă din A pe B'C' trece prin mijlocul lui $\overline{BC}$, iar perpendiculara coborîtă din A' pe BC trece prin $\overline{B'C'}$.

N. B.

V. 55. Se consideră în acelaşi plan un triunghiu ABC şi un punct M. Prin M se duc segmentele MA_1, MB_1, MC_1 egale şi paralele cu medianele $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ ale triunghiului ABC.

Să se arate, că laturile triunghiului $A_1B_1C_1$ sunt paralele cu laturile lui ABC şi astfel ca:

$$\overline{A_1B_1} = \tfrac{3}{2}\,\overline{AB}\ ,\ \overline{B_1C_1} = \tfrac{3}{2}\,\overline{BC}\ ,\ \overline{C_1A_1} = \tfrac{3}{2}\,\overline{CA}.$$

N. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 47.* N fiind un număr de n cifre, câte cifre ar putea avea N^N ?

I. L.

VI. 48. Să se arate că *1935* se poate descompune, în o infinitate de moduri, într'o progresie aritmetică cu trei, cinci sau nouă termeni.

I. L.

VI. 49. Un avion parcurge în prima oră *300* km/oră, în a doua *295* km/oră, în a treia *290* km/oră şi tot aşa mai departe. In cât timp parcurge 2000 km ?

I. L.

VI. 50. Să se stabilească egalitatea :

$$4\sin^2(x-y) = 4(\sin^2 x + \sin^2 y)(\cos^2 x + \cos^2 y) - (\sin 2x + \sin 2y)^2.$$

O. N. Ţ.

VI. 51. Să se verifice identitatea :

$$\frac{\sqrt[n]{\frac{x+a}{x+b}} + \sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}}{\sqrt[n]{\frac{x+b}{x+a}} + \sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}} + \frac{\sqrt[n]{\frac{x+a}{x+b}} - \sqrt[n]{\frac{x-a}{x-b}}}{\sqrt[n]{\frac{x+b}{x+a}} - \sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}}} \equiv 0.$$

C. I. B.

VI. 52. Să se verifice identitatea :

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{c})(\sqrt{a} - \sqrt{c}) \equiv a^2 - (b+c)\,a + bc.$$

N. B.

VI. 53. Să se verifice identitatea :

$$(\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{c})(\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{d})(\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{c})\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{d})$$

$$\equiv a - (b+c+d)\sqrt[3]{a^2} + (ab+ac+bc)\sqrt{a} - bcd.$$

N. B.

VI. 54. Să se calculeze produsul:

$$(\sqrt[32]{a}-\sqrt[64]{b})(\sqrt[32]{a}+\sqrt[64]{b})(\sqrt[16]{a}+\sqrt[32]{b})(\sqrt[8]{a}+\sqrt[16]{b})$$
$$(\sqrt[4]{a}+\sqrt[8]{b})(\sqrt{a}+\sqrt[4]{b})(a+\sqrt{b}).$$

N. B.

VI. 55. Să se verifice identitatea

$$(\operatorname{tg}^2 a - \sin^2 a)(\operatorname{cotg}^2 a - \cos^2 a) = \sin^2 a \cos^2 a$$

M. G.

VI. 56. Să se verifice identitatea:

$$\operatorname{tg}(a-b) + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg}(a-b) \equiv \operatorname{tg} a$$

Să să deducă apoi identitatea (VII. 9):

$$\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} 2a + \operatorname{tg} 3a \equiv \operatorname{cotg} a \cdot \operatorname{cotg} 2a \cdot \operatorname{tg} 3a.$$

N. B.

VI. 57. Dacă $a+b=c+d$ avem egalitatea:

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} d = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} c \operatorname{tg} d + \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c \operatorname{tg} d$$
$$- \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} d.$$

N. B.

VI. 58. Să considerăm două plane paralele P şi R. Dintr'un punct A al planului P ducem segmentul $\overline{AB}$, perpendicular pe planul R şi limitat la el. Prelungim pe $\overline{AB}$ cu segmentul $\overline{BC}$ egal cu $\overline{AB}$. Apoi luăm în planul R un segment oarecare $\overline{BE}$ egal cu $\overline{AB}$. Din punctul C ducem un plan S perpendicular pe dreapta AE, care taie planul P după dreapta MN. Fie acum G un punct (interior) pe segmentul $\overline{AE}$ astfel ca $\frac{\overline{AG}}{\overline{GE}} = 2$. Să se arate că:

a) Planul S trece prin punctul E;

b) Dreapta BG întâlneşte pe MN;

Dacă H este punctul comun dreptelor BG şi MN, dreapta AH este perpendiculară pe MN.

O. N. Ţ.

VI. 59. Să considerăm un plan P, un punct I exterior lui şi două drepte D şi D' din planul P concurente în punctul T. In planele R şi R' determinate respectiv de dreptele D şi D' cu punctul I,

ducem două cercuri egale cu centrul în I, tăind pe D şi D' respectiv în punctele (A, B) şi (A', B'). Să se arate, că: *a)* Punctele A, B, A', B' sunt pe acelaşi cerc O; *b)* Dreapta IO este perpendiculară pe planul P.

O. N. Ţ.

VI. 60. Se consideră un paralelogram ABCD şi un punct M în planul său. Se construieşte segmentul $\overline{MA}$ şi se prelungeşte cu o lungime $\overline{AN} = \overline{MA}$. Se construieşte segmentul $\overline{NB}$ şi se prelungeşte cu o lungime $\overline{BP} = \overline{NB}$. Se construieşte segmentul $\overline{PC}$ şi se prelungeşte cu o lungime $\overline{CQ} = \overline{PC}$.

1°. Să se arate, că dreapta MQ trece prin punctul D şi că D este mijlocul segmentului $\overline{MQ}$.

2°. Se păstrează aceste proprietăţi, când M este un punct oarecare în spaţiu?

N. B.

Clasa VII-a. *Exerc. 39.* Să se calculeze limita expresiunii:

$$\frac{x^{n+1} - [1 + C_{n+1}^1 (x-1) + C_{n+1}^2 (x-1)^2 + \ldots + C_{n+1}^p (x-1)^p]}{(x-1)^{p+1}}$$

când $x \to 1$. G. D. S.

VII. 40. Cubul unui număr întreg este totdeauna egal cu diferenţa pătratelor a două numere întregi?

G. B.

VII. 41. In câte moduri 1935 se poate pune sub forma unei diferenţe de două pătrate?

I. L.

VII. 42. Să se găsească restul diviziunii prin 13 al sumei:

$$1934^{1935} + 1935^{1934}.$$

I. L.

VII. 43. Să se verifice identitatea:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a^6 & a^4 \\ 1 & a^6 & 0 & a^2 \\ 1 & a^4 & a^2 & 0 \end{vmatrix} \equiv a^4 (1+a+a^2)(1-a+a^2)(1+a-a^2)(1-a-a^2).$$

O. N. Ţ.

VII. 44. Să se verifice identitatea:

$$(a+1)^6-(a-1)^6+32a^3\equiv 6a\,[(a+1)^4+(a-1)^4].$$

N. B.

VII. 45. Să se demonstreze identitatea:

$$(x+a)^n-(x+b)^n+C_n^1[(x+a)^{n-1}\,.\,b-(x+b)^{n-1}\,.\,a]+C_n^2[(x+a)^{n-2}\,.\,b^2-(x+b)^{n-2}\,.\,a^2]+\ldots+C_n^{n-1}[(x+a)\,b^{n-1}-(x+b)\,.\,a^{n-1}]+b^n-a^n\equiv 0,$$

unde C_i^j sunt coeficienţii binomiali. N. B.

VII. 46. Să se arate că determinantul

$$D\equiv\begin{vmatrix} x-b & x-c & a(b-c)\\ x-c & x-a & b(c-a)\\ x-a & x-b & c(a-b)\end{vmatrix}$$

are valoarea: $-(a-b)\,(b-c)\,(c-a)\,(3x-a-b-c)$.

N. B.

VII. 47. Să se arate că determinantul:

$$D\equiv\begin{vmatrix} x-a & x-b & a-b\\ x-b & x-c & b-c\\ x-c & x-a & c-a\end{vmatrix}$$

este nul, fără să se desvolte.

Să se verifice prin desvoltare.

Să se deducă din desvoltarea determinantului identitatea:

$$(x-a)^2(b-c)+(x-b)^2(c-a)+(x-c)^2(a-b)\equiv(x-b)\,(x-c)\,(b-c)+(x-c)\,(x-a)\,(c-a)+(x-a)\,(x-b)\,(a-b).$$

N. B.

ERATA: La VII. 30, se va corecta: „$2p-3$“ în loc de „$2p+3$“.

La IV. 29, după al 3-lea rând se va adăuga: „astfel ca $\overline{DG}=\frac{\overline{AD}}{4}$ şi H pe baza mare“, după care urmează textul publicat.

Soluţiile exerciţiilor propuse se vor redacta conform instrucţiunilor publicate în No. 1, pag. 8 şi se primesc timp de 3 luni dela data propunerii lor.

Nu se primesc exerciţii propuse decât dela redactorii „Gazetei Matematice“.

Abonamentul se face numai pe întregul an şcolar şi se plăteşte înainte.

Drepturile de reproducere sunt rezervate Societăţii „Gazeta Matematică“.

BIBLIOTECA „ASOCIAȚIUNEA”
SIBIIU

Nr. 6

BIBLIOTECA CENTRALĂ
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL I. No. 6 — 1 MARTIE 1935

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii, abonamente şi orice corespondenţă pe adresa:
Lt.-Comandor GR. ZAPAN

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa VI-a. *Exerc. 15. Fie* A *unul din punctele comune a două cercuri secante şi* B, C *punctele unde tangentele lor comune sunt tăiate de coarda comună.*

Dacă razele OA *şi* O'A *ale celor două cercuri sunt perpendiculare, (cercurile se numesc în acest caz ortogonale) şi au lungimile cunoscute* R, r *să se calculeze segmentele* AB , AC.

C. I. B.

Se notează T, T' punctele în care una din tangentele comune atinge cercurile O, O', D punctul în care coarda comună tae dreapta centrelor.

Din triunghiul dreptunghiu AOO', $\overline{AD} = \dfrac{Rr}{\sqrt{R^2 + r^2}}$

şi dacă $\overline{BA} < \overline{CA}$, $x = \overline{BA}$,

deoarece $\overline{BA} \times \overline{BC} = \overline{TB}^2$

(puterea punctului B faţă de cercul O),

$$x\left(x + \frac{Rr}{\sqrt{R^2 + r^2}}\right) = \overline{TB}^2. \qquad (1)$$

Calculul lui $\overline{TB}$. $\overline{TT'}^2 = \overline{OO'}^2 - (R - r)^2 = 2Rr$

$\overline{TB} = \overline{T'B}$ întrucât coarda comună e locul punctelor cu puteri egale faţă de cele 2 cercuri. Deci

$$\overline{TB} = \frac{\overline{TT'}}{2} \qquad \overline{TB}^2 = \frac{Rr}{2}$$

înlocuind în egalitatea (1) şi rezolvând, se obţine

$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{R^2r^2+2Rr(R^2+r^2)}-Rr}{2\sqrt{R^2+r^2}}, \quad \overline{AC} = \frac{\sqrt{R^2r^2+2Rr(R^2+r^2)}+3Rr}{2\sqrt{R^2+r^2}}.$$

Clasa VII-a. *Exerc. 18. In patrulaterul* ABCD *înscris în cercul fix* O, *latura* AD *e fixă, iar latura* BC *are o lungime constantă. Se cere locul geometric al intersecţiei dreptelor* AB *şi* CD.

N. B.

Punctele A şi D sunt fixe, iar arcul BC constant. Dreptele AB şi CD se întâlnesc într'un punct I, astfel că unghiul AID este constant. Locul se compune dintr'un cerc trecând prin A şi D.

VII. 20. Se dau în plan punctele fixe B, C *şi punctul* A *mobil ori cum. Fie* C_a, C'_a *şi* B_a, B'_a *proecţiile vârfurilor* C *şi* B *pe bisectoarele unghiului* A. *Să se demonstreze că diagonalele* $C_a C'_a$, $B_a B'_a$ *ale dreptunghiurilor* $CC_a AC'_a$, $BB_a AB'_a$ *se întâlnesc într'un punct fix.*

GH. B.

Diagonalele $C_a C'_a$ şi AC ale dreptunghiului $CC_a AC'_a$ se întâlnesc în mijlocul A' al lui AC. Apoi în acest dreptungiu

$$\sphericalangle CC'_a C_a = \sphericalangle C'_a C_a A = \sphericalangle C_a AC$$

şi cum AC_a e bisectoara lui A rezultă că

$$\sphericalangle C'_a C_a A = \sphericalangle C_a AC = \sphericalangle C_a AB$$

deci $C'_a C_a \parallel AB$ şi trece şi prin mijlocul A' al lui BC. La fel se arată că $B'_a B_a$ trece prin A'.

S'au primit soluţii bune dela: [1]).

Şcoala Centrală de fete „Marica Brâncoveanu" Bucureşti.

Clasa IV-a: ALEXE C. LUCIA (IV: 24, 31, 32*, 33, 34*), BARBU M. IOANA (IV: 32) CRISTEA M. ELENA (IV: 24, 32), NICOLAU A. ELENA (IV: 24, 31, 32, 33) TONCESCU DESPINA (IV: 30, 31*, 32*, 34*), TUDORAN M. SONIA (IV: 10, 13, 16, 18, 19*, 20 abd, 21, 24), VETTU PAULINA (IV: 32, 33, 34*).

1) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu rezolvat foarte bine.

Clasa V-a: LUPU I. MARIA (V: 26, 33, VI: 26, 27, 28), NASTA A. GABRIELA AMELIA (V: 11, 12, 18, 21*, 22*, 23*, 25, 31*, 32*), ROMAŞCAN G. GEORGETA (V: 20*, 24, 26*, 27*, 28*, 29*, 30*, 31*, VI: 26*, 27* 28*, 44*, 45*, 46*), STĂNESCU N. VIRGINIA (V: 11, 13, 18, 27, 28, 29, 30*, 31*, 34*, 35, 36*, 41*, 45, VI: 26*, 28*, 44*, 45*, 46*), TROFIN AURORA (V: 10*, 12*, 24*, 28* 29*, 30*, 31*. VI: 26*, 27*, 28*).

Clasa VI-a: GILORTEANU P. ADINA (VI: 26, 35, 36, 43, 44*, 45*, 46), MAZILU P. DACIA (VI: 35, 36, 37, 39, 44, 45, 46), SOTIR G. ELENA (VI: 29, 30, 31, 32, 35, 36, 37, 39, 43*, 44, 45, 46), ZONFALY I. MARIA (VI: 44*, 45*, 46*).

Liceul de fete „Regina Maria" Bucureşti.

Clasa VI-a: TĂNĂSESCU VENERA (VI: 32*, 35*, 36*, 37*, 38*, 39*, 40, 41*, 42*, 43*, 44*, 45*, 46).

Liceul de fete „Domniţa Ileana" Bucureşti.

Clasa IV-a: BĂDULESCU V. VIORICA (IV: 31, 32*, 33, 34, 44, 45, 46, 47, 48), ERBLICH D. ELSA (IV: 16, 17, 20a, 21, 24, 26), FLORICICA ELENA (IV: 10, 11, 12, 16*, 22*, 23*, 24, 26, 30, 31, 32*, 34, 36), NĂNĂU MARGARETA (IV: 31, 32, 33, 34).

Clasa V-a: MANOLACHE LIANA (V: 10, 18, 24, 26, 33, 37).

Institutul Ortodox Internat Bucureşti.

Clasa IV-a: OTETELIŞANU E. RUXANDRA (IV: 32*, 33, 34, 45, 46, 48).

Externatul Secundar „Zoe Râmniceanu" Bucureşti.

Clasa V-a: AUMAN VALERIA (V: 14, 15, 19, VI: 26), STOIDIS D. ECATERINA (V: 10, 11, 13, 18. VI: 26).

Clasa VI-a: LAZAROVICI J. ROZICA (VI: 35, 36, 40, 43, 44, 45, 46), ROCIU I. MARGARETA (VI: 35, 36, 43, 44*, 45*, 46*).

Clasa VII-a: CRISTESCU M. MARGARETA (VII: 26).

Institutul Bolintineanu Bucureşti.

Clasa IV-a: SEHR I. L. IOSEFINA (IV: 24).

Clasa V-a: DOBRE M. HORTENSIA (V: 18), DUMITRESCU M. (V: 10, 18, 24).

Liceul de fete „Dr. C. Angelescu" Buzău.

Clasa VII-a: IONESCU G. FILOFTEIA (VII: 14*, 26, 31, 32*, 36*), MIHALCEA I. CORINA (VII: 22, 26, 31, 32).

Liceul de fete „Elina Matei Basarab" Râmnicul-Sărat.

Clasa IV-a: ALEXANDRESCU E. POLIXENIA (IV: 11, 14*, 16*, 26).

Liceul de fete din Râmnicul-Vâlcea.

Clasa VI-a: DWORSCHA K. JUSTINA (IV: 32, 33, 34), POPESCU PAULINA (IV: 32, 33, 34).

Liceul de fete „Samuil Vulcan" Beiuş.

Clasa IV-a: LUCACIU ŞT. MARG. ELISABETA (IV: 46, 48).

Liceul Militar „D. A. Sturdza" Craiova.

Clasa V-a: BĂDESCU G. N. (V: 11, 12, 13*, 18*, 26*), CIOC I. D. (V: 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31. VI: 26, 27, 28, 34. VII: 22), DRĂGUŞIN D. D. (V: 11, 12, 13*, 18, 26*), GRIGORE M. I. (24, 26, 27, 28, 29*, 30, 31, 32*, 34), POPESCU M. G. (V: 26, 27, 28*, 29, 30. VI: 34. VII: 22).

Clasa VI-a: BÂRCA GHEORGHE M. (VII: 24, 32), CIOC L. I. A. (VII: 32), RACOŢEANU C. (VI: 26*, 34*, 44*, 45*, 46), STOIA P. I. (VI: 26).

Clasa VII-a: AVRAM I. I. (VII: 22, 26, 27, 31, 34, 35*, 36), BĂDOI M. I. (VII: 22, 26, 32), BĂRBULESCU P. (VII: 32, 34, 35*, 36), BENEA A. (VII: 22, 26, 27, 32), BERCULESCU A. I. (VII: 22, 27, 32, 34, 35*), BUSUIOC C. I. (VII: 22, 27, 31, 32. 34, 35*, 36), CATRINA C. (VII: 22, 26, 27, 32, 34, 35*), CAVAROPOL M. (VII: 22, 26, 27, 31, 32, 34, 35*, 36), CAVAROPOL N. (22, 26, 27, 31, 32, 34, 35*, 36), CIOCHIA A. (VII: 22, 26, 34, 35*). CIORTEA A. G. (VII: 22, 26, 27, 34, 35*), CRISTESCU I. (VII: 22, 26, 27, 32, 34), CUNA S. S. 22, 27, 34), DRĂGHICESCU V. (VII: 22, 27, 31, 32, 34, 35*, 36), DULĂMIŢĂ I. (VII: 22, 26, 27, 31, 34, 35*. 36), DUMITRAŞCU A. (VII: 22, 27), DUMITRESCU M. (VII: 22, 27, 34, 35*), DUMITRESCU I. I. (VII: 22, 27), GABOR I. (VII: 22, 27, 34), GEORGESCU I. I. (VII: 22, 27, 31, 32, 34, 35*), GROSSU P. (VII: 22, 27, 32, 34), GROZĂVESCU C. (VII: 22, 27), IOAN M. GR. (VII: 22), IONESCU GR. (VII: 22, 26. 27, 31, 32, 34, 35*, 36), IONESCU ILIE (VII: 22, 27), IONESCU IOAN (VII: 22, 27, 31, 32, 34, 35*, 36), IORDACHE N. (VII: 34, 35*), IOSUB TEOFAN (VII: 22, 26, 27, 32, 34), MIHAI I. G. (VII: 22, 26, 27, 31, 32, 34, 35*, 36), MITRE PANTEL. G. BÂRCĂ (VII: 22, 26, 27), MIHĂILESCU I. 22, 26, 27, 32, 34), NICOLAESCU N. (VII: 22, 26, 27, 32, 34), PARISIANU M. (VII: 22, 26, 27, 31, 32, 34, 35*, 36), PESTRIŢU-BĂILEŞTI I. M. (VII: 22, 26, 27, 31, 32, 34, 35, 36), PETRESCU C. G. (VII: 22, 27, 34, 35*), SÂRBU VAL. (VII: 22, 27, 31, 32, 34, 35*, 36), SAVIN I. (VII: 22, 26, 27*, 31, 32, 34, 35*, 36), SEGÂRCEANU M. (VII: 34), STĂNESCU M. E. (VII: 34*), TUDOR C. I. (VII: 22, 27, 32, 34, 35*).

Liceul Militar „Ştefan cel Mare" Cernăuţi.

Clasa IV-a: ALEXANDRESCU G. P. (IV: 21*, 24, 25), BĂLĂUŢEI F. G. (IV: 21, 24, 26), BOBULESCU M. A. (IV: 26), BREŢCANU P. C. (IV: 21, 24, 25, 26), CONSTANŢINESCU D. (IV: 24, 25, 26), COSMA A. (IV: 21, 24, 26), DOMBROVSCHI P. I. (IV: 21, 24, 26), DUMITRESCU C. P. (IV: 21, 24, 25, 26), JUGĂNARU P. (IV: 21, 24, 26), LAZĂR D. (IV: 21, 26), MANOLESCU R. (IV: 21, 24, 26), MATEESCU A. C. (IV: 26), MATIEŞ M. (IV: 21, 26), METZ M. (IV: 21, 24, 25), MOŢOC R. (IV: 21, 26), PETROVICI C. C. (IV: 26), POALELUNGI G. V. (IV: 26), POPOVICI C. AL. (IV: 26), RĂDUCĂNESCU S. D. (IV: 26), ROTTA Ş. (IV: 21, 26), ŞERBĂNESCU N. Ş. (IV: 26), STĂNESCU ST. V. (IV: 21), STOICESCU Ş. (IV: 21, 26), TEODORESCU V. V. (IV: 21, 26), TROFIN C. (IV: 24, 26), VASILIU N. (IV: 21, 24, 26).

Clasa V-a: APOSTOL N. (V: 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32), CRUŢESCU T. (V: 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32), DUMITRESCU V. (V: 25, 31, 32), FLOAREŞ I. A. (V: 24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32), LAZĂR T. A, (V: 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32), MAREŞ D. P. (V: 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32),

MITITELU S. C. (V : 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32), NEDELCU V. N. (V : 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32), NISTORESCU V. D. (V : 30, 31, 32), PARASCHIVESCU T. M. (V : 24, 25, 26, 29), RUSSU I. E. (V : 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32), TEODOREANU V. N. (V : 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 32).

Clasa VII-a : BOITAN P. N. (VII : 22, 24, 26*, 27), CASANDRA G. V. (VII : 26*, 27), CEHAN G. A. (VII : 22, 26, 27*), CRISTEA G. E. (VII : 22*, 26*, 27), DUMITRESCU I. P. (VII : 26), GOGOROIU N. (VII : 22*, 26, 27*), MĂGALĂ G. (VII : 22*, 24, 27), MAXIM I. (VII : 27), OPRAN I. C. (VII : 22, 24, 26, 27*), ROMAN I. N. (VII : 22, 24, 26, 27*), SECARĂ A. (VII : 22, 26*, 27*), STĂNCIULESCU G. (VII : 22, 24, 26, 27*), SURUMEI I. M. (VII : 22, 26, 27*), ZGÂRCEA G. (VII : 26, 27*).

Liceul Militar „Mihai Viteazul" Tg.-Mureş.

Clasa IV-a : CONSTANTINESCU V. (IV : 32), DIACONU I. I. (IV : 44), DIMITRIU P. (IV : 18, 21, 26), DUMITRESCU V. M. (IV : 44, 45, 46, 48*), ENĂCHESCU M. (IV : 34*), GEORGH. V. A. G. (IV : 44, 45, 46, 48), IACOB ST. (IV : 10, 21, 24, 26, 31, 32), PASERE S. A. (IV : 10, 21, 24, 26, 31, 32, 34*, 44*, 45*, 46), POPESCU F. A. (IV : 31, 44, 45, 46), RĂDULESCU M. (IV : 44), SĂNDULESCU S. C. (IV : 44).

Clasa V-a : BANCIU P. C. (V : 19, 31), BOBORODEA I. I. (V : 31, 32), CAPOTA G. G. (V : 26*), DANIELESCU I. A. (V : 10), HORTOPAN G. G. (V : 10, 12), MATEI D. V. (V : 26), MOSORA N. N. (V : 24, 26), SECHEL T. M. (V : 10, 26, 32), TOMA N. N. (V : 10, 11, 12, 24, 26, 28, 29, 30*).

Clasa VI-a : FENICHI AL. (VI : 12).

Clasa VII-a : CRIŞAN T. I. (VII : 22, 26), DECEANU G. (VII : 26, 27, 31, 32, 34, 36, 43), MOISE N. (VII : 26), ORĂŞANU G. I. (VII : 26, 32), STĂNESCU G. (VII : 26, 36), ŢARĂLUNGĂ G. D. (VII : 22, 26, 27).

Liceul Militar Iaşi.

Clasa VI-a : BACIU N. G. (VI : 12, 21, 50), BOGDAN S. I. (VI : 12, 13, 14, 18*, 20, 26, 27*, 29, 30*, 33*, 34. VII : 13), BUCUR N. V. (VI : 20, 44*, 45. VII : 13), BUZINCU F. I. (VI : 11*, 12, 21, 50. VII : 13, 22, 26, 27), CĂLIN I. D. (VI : 12, 21. VII : 13), COJOCARU P. P. (VI : 11, 12, 13, 14, 21, 26, 27, 29, 30*, 33*, 34, 35, 36, 39, 44*, 45*, 46*, 50. VII : 22, 26), COTESCU C. (VI : 44*, 45, 46. VII : 13), DIMITRIU I. C. (VI : 26, 27*, 29, 30*, 33*, 34, 44*, 45, 46), DUMBRĂVESCU D. (VI : 12, 18*, 26, 27*, 29, 30*. 33*, 34), IONESCU V. (VI : 50. VII : 22, 26), ISAC C. D. (VI : 11, 12, 13, 14, 21, 26, 27, 30*, 33*, 34, 35, 36, 44*, 45*, 46*. VII : 22), TROACĂ V. E. (VI : 13, 14, 26, 27, 29, 30, 34, 35, 36, 44*, 45*, 46*. VII : 22).

Liceul Militar „Nicolae Filipescu" Mânăstirea Dealu.

Clasa IV-a : FLORESCU L. V. (IV : 21*, 22, 23, 24, 26. V : 13, 29, 30, 31*, 32*. VI : 26), ILIE A. I. (IV : 10*, 11, 12, 13, 14*, 15*, 16*, 17, 18*, 19*, 20bcd, 21, 22, 23, 24, 25. V : 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17*, 18*, 20, 21, 24, 25, 26*, 27, 28*, 29*. 30*, 31*, 32. VI : 13, 14*, 21, 26*, 27*), POSTELNICESCU M. Ş. (IV : 11*, 13, 14*, 21, 22*), RĂDULESCU G. O. (IV : 22*, 23*, 24, 25, 29*. V : 13, 18*, 26*, 28*, 29*, 30*. VI : 13, 14*, 21, 26*, 27*).

Clasa V-a: BĂDULESCU V. D. (V: 18, 19, 20, 21, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 44*. VI: 26, 34, 44*), LĂZĂRESCU P. S. (V: 10, 13, 24, 31, 32*, 41*), ŞTEFĂNESCU C. (V: 18, 19, 20, 21, 26, 28, 29, 31, 32*, 41*. VI: 26, 27, 34, 44*).

Clasa VII-a: DASCĂLU G. I. (VII: 27), LĂZĂROIU I. R. (VII: 13, 14, 22, 27).

Liceul Militar „Regele Ferdinand" Chişinău.

Clasa VI-a: BULAT L. M. (VI: 44*, 45*),

Clasa VII-a: MILLU I. N. (VII: 21, 26*, 28).

Seminarul pedagogic Bucureşti.

Clasa IV-a: BODNĂRESCU H. (IV: 30, 31, 32*, 33, 34*, 35, 36*, 39, V: 33, 34*, 35*, 36*, 37, 38, 39*, 40*. VI: 44*, 45*, 46*).

Clasa VII-a: CIOROIANU M. C. (VII: 22, 26), KATZ H. R. F. (VII: 10*, 11*, 12, 13, 14*, 15, 16, 17, 18*, 19*, 20 21).

Liceul „Gh. Lazăr" Bucureşti.

Clasa IV-a: ANGHELESCU V. E. (IV: 21, 22*, 23, 24, 25, 26*, V: 28*. VI: 26*), MIULESCU M. (IV: 31, 32*, 33, 34*, 35*. VI: 26).

Clasa V-a: ARAMĂ C. (33, 34*, 35*, 36,* 37*, 38*), DECUSARĂ E. N. (V: 18, 20, 24, 29, 30, 33, 37), DROUHET ED. (V: 33*, 38*. 39*, 41*. VI: 26, 27, 44*, 45*, 46), IONESCU V. GR. (V: 29, 30, 34, 37), MUNROE M. M. (V: 21*, 27*, 28*, 29*, 30*, 31*, 32*, 33*, 34*. VI: 24, 25*, 26*, 27*, 44*), STOICESCU C. C. (V: 29, 30, 33*, 34*, 35*, 36*, 37*, 38*, 41*).

Clasa VI-a: BĂDULESCU M. (VI: 49, 53*), BALLAN A. M. (VI: 26*, 27*, 28*, 34*, 35*, 36*. VII: 22), BĂZDOACĂ C. P. (VI: 45, 46, 51*, 52, 53, 54*), BEGU I. I. (VI: 35, 36, 37, 44*, 45*, 46*, 51*), BREZEANU D. O. (VI: 34*, 37*), COGAN H. I. (VI: 35*, 36*, 43, 44*, 45*, 46), DRĂGHICESCU M. (VI: 51*. VII: 22, 44*), IORDACHE I. C. (VI: 32, 34, 51*), MIHAIL G. (VI: 51*), SCHRAMM F. B. (VI: 34, 35, 44*), TRANDAFIRESCU I, (VI: 35, 36*, 41, 45*, 46*).

Clasa VII-a: BAICU N. N. (VII: 22, 26, 27, 28*, 30, 31, 32), BĂLĂŞESCU I. M. (VII: 22, 32*, 33, 34, 36).

Liceul „Matei Basarab" Bucureşti.

Clasa IV-a: HORODNICEANU J. T. (IV: 16*, 19*, 20a), JACOBSON F. (IV: 34).

Clasa V-a: FROIMESCU E. A. (V: 10, 11, 13, 15, 18, 20, 21), HEROVICI J. I. (V: 25), PRECIADO J. T. (V: 10, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 28, 29, 30, 31, 32, 41, 42, 44), ŞAICHIN O. A. (V: 21, 33, 36, 37, 38, 39*, 40*, 41*, 42*, 43, 44, 45, VI: 11*, 12*, 14, 16*, 21, 22, 34, 35, 36, 41*), STERN M. (V: 19, 33*, 34, 35, 37*, 39*, 41*, 42*, 43, 44*, 45).

Clasa VI-a: SCHAPIRA J. (VI: 35).

Colegiul Naţional „Sf. Sava".

Clasa IV-a: BĂDULESCU P. N. (IV: 10, 11, 13*, 14*, 15*, 16*, 17, 18*, 19*, 34*), CIOCÂLTEU V. V. (IV: 21, 24, 25, 47), CIURESCU I. R, (IV: 10, 16, 17, 18, 19, 20abcd, 21, 24, 26, 31, 32, 35, 41, 45*, 46). DUMITRESCU P. Ş. (IV: 24, 26, 41), ENESCU M. (IV: 25, 32, 33), PÂRVULESCU O, (IV: 16*, 18*, 24, 26, 32, 33, 34).

Clasa V-a: STROESCU I. M. (V: 24, 26*, 28, 30. 46. VI: 26, 27*. VII; 44*).

Clasa VII-a: NEAGU V. V. (VII: 36).

Elevi particulari Bucureşti.

Clasa VI-a: MECU I. M. (VI: 26*, 27*, 35*, 36*, 37, 44*, 45*, 46*).

Liceul „Mihai Viteazul" Bucureşti.

Clasa IV-a: CÂRNARU I. D. O. (IV: 16*, 20d. V: 20), CONSTANTINESCU C. (IV: 13, 14), DIMITRIU P. (IV: 10), GROZDEA D. M. (IV: 10, 17, 20d), SERDICI G. (IV: 10, 11, 14, 16*).

Clasa V-a: ALEXANDRESCU M. (V: 33, 34*, 35*, 36*, 37*, 38*), AZDRIL L. R. (V: 10, 11, 14, 18, 21, 23, 35*, 36*), ENCIULESCU G. I. (V: 10, 18, 28, 29, 30, 33, 34, 35, 36, 37, 38), GEORGESCU T. A. (V: 10, 12, 18, 24, 29, 30, 33, 34, 36), GROSS E. (V: 33, 34, 35, 36, 37, 38), HAMTIUMAN H. S. (V: 10, 11, 12, 18), LASCĂR O. M. (V: 10, 11, 12, 13, 15), PORUMBESCU V. N. (V: 10, 11, 12, 13, 18, 24, 25, 29, 30), RAUCH L. I. (V: 12, 26, 29, 30*, 34, 35. 36, 46*, 50*. VI: 44*, 45*, 46, 52, 53*. VII: 44), STOENESCU S. N. (V: 10, 12, 15, 18, 33, 34, 35, 36, 37, 38), ZAHARESCU T. (V: 10, 18, 24, 33), ZUPERMAN M. (V: 10, 12, 18, 26, 29, 33, 34, 35, 36).

Clasa VI-a: CRISTESCU I. G. (VI: 35, 36, 39*, 44, 45*, 46), SAB D. I. (VI: 10, 11, 12, 13, 21, 25).

Liceul „Cantemir Vodă" Bucureşti.

Clasa V-a: PĂRCĂLĂBESCU I. A. (V: 34, 35, 37, 38, 39).

Clasa VI-a: GEORGESCU N. N. (VI: 11, 12, 18, 21).

Liceul „Spiru Haret" Bucureşti.

Clasa IV-a: STĂNCULESCU M. (IV: 21, 24, 31, 32*, 34, 36).

Clasa V-a: CHIRICEANU M. A. (IV: 24, 25, 34*, 35, 36), NAHMIAS M. V. (V: 24, 25, 26, 29, 30, 33, 37, 38), STĂNCULESCU T. I. (V: 24, 26, 29, 31).

Clasa VI-a: ANGELESCU I. C. (VI: 37, 39, 43, 44*, 45, 46*), BOISNARD M. L. (VI: 35, 36*, 44, 45*, 46*, 50).

Liceul „Mihail Eminescu" Bucureşti.

Clasa IV-a: ROTARU A. M. (IV: 10).

Clasa VI-a: POMPONIU L. L. (VI: 11, 12, 13*, 14, 18*, 19, 21. VII: 18).

Liceul „Aurel Vlaicu" Bucureşti.

Clasa VI-a: BUZESCU P. A. (VI: 16, 18, 20*, 23*, 24*, 34, 37, 39, 43*, 44, 45, 46. VII: 13).

Liceul „Marele Voevod Mihai" Bucureşti.

Clasa VII-a: STOICA D. AL. (VII: 23*).

Liceul „Sf. Iosif" Bucureşti.

Clasa V-a: POPESCU N. A. (V: 39*, 41*, 42*, 44).

Clasa VI-a: ŞARAGA T. V. (VI: 26*, 27).

Clasa VII-a: MICHEL ADOLF (VII: 22, 27, 32, 36).

Liceul „Sf. Andrei" Bucureşti.

Clasa VI-a: GROSSU R. (VI: 36).

Colegiul Naţional Carol I, Craiova.

Clasa III-a: BASSARABESCU M. D. (IV: 26), IONESCU G. N. (IV: 26), IOVĂNESCU R. (IV: 26), POPILIAN C. I. (IV: 26).

Clasa V-a: BRÂNDUŞOIU C. P. (V: 33, 37, 38), NICULESCU S. (V: 33), PREDESCU ŞT. (V: 37*, 49*).

Clasa VII-a: AVRĂMOIU A. E. (VII: 22, 27), CERCELAN G. D. (VII: 13*, 14, 22, 27, 28, 31, 32, 34, 36), MOISOVICI M. ŞT. (VII: 13, 22, 26, 27, 28, 35*, 36), TUTUNEA P. (13, 22, 31, 32, 34, 35*, 36),

Liceul „Fr. Buzeşti" Craiova.

Clasa VII-a: AMĂRĂŞTEANU F. M. (VII: 13, 22, 26, 27*, 28*).

Liceul „C. Diaconovici Loga" Timişoara.

Clasa IV-a: BĂLEANU V. (IV: 10), EVUŢIANU S. G. (IV: 44*, 45, 46, 47*, 48).

Clasa V-a: ALACI V. V. (V: 11, 31*, 32*, 33*, 35*, 37*, 38*, 44*), MORARIU T. (V: 35, 36, 37*, 38*), POPESCU T. (V: 34, 35, 36, 37*. 38*, 44), ŞUBONI J. C. (VII: 22*).

Clasa VI-a: CIUNI A. I. (VI: 44*, 45, 46).

Seminarul pedagogic Cluj.

Clasa IV-a: FLORIAN T. T. (IV: 31. 32, 33, 34, 35*, 36), KAUNTZ. I. I. (IV: 10. 21, 22, 23, 24, 25, 26, 31, 33).

Clasa VI-a: BALÁZS A. G. (VI: 20, 21, 26, 27, 28, 34, 35, 36, 37, 44, 45, 46).

Liceul „Moise Nicoară" Arad.

Clasa IV-a: BINDER I. (IV: 31, 32*, 33*, 34).

Liceul „Samuil Vulcan" Beiuş.

Clasa IV-a: JIDANU I. C. (IV: 45, 46, 48).

Clasa V-a: BALOG C. (V: 24, 25, 26, 28, 29, 30. VI: 26, 27), WITTENBERGER Z. R. (V: 26, 31, 32. VI: 26).

Clasa VI-a: HOMPOLA J. T. (VI: 26, 27, 28*, 34, 35, 36*, 37, 39*, 44*, 45*, 46, 58, 59*).

Liceul „B. P. Haşdeu" Buzău.

Clasa IV-a: NICOLAU L. M. (IV: 16*, 18, 19*, 22, 23, 24, 25, 26*, 31, 32, 34).

Clasa V-a: NICOLAU L. L. (V: 11, 12, 18, 19. 20, 21, 24, 25, 26, 29*, 34, 35, 36, 37, 38, 44).

Liceul „Tasse Dumitrescu“ Mizil.

Clasa IV-a: BUZNEA C. R. (IV: 10, 11, 13, 20a, 34), GIAMBAŞU V. T. (IV: 11, 13, 20a, 34), POPESCU M. A. (IV: 11, 13, 14, 20b, 21), TEODORESCU D. C. (IV: 11, 13, 14, 20a, 21).

Liceul „Unirea“ Focşani.

Clasa IV-a: IOSIPESCU C. A. (IV: 10*, 18*, 19*, 26, 35), TURTOIU F. (IV: 21, 24, 31, 34).

Clasa VI-a: FOCŞENEANU S. (VI: 10, 11, 12, 13, 26, 27, 34, 44, 46).

Clasa VII-a: FOCŞENEANU I. C. (VII: 10, 11, 12, 13, 21), MARTAC V. R. N. (VII: 11, 12*, 13, 14, 22, 26, 27).

Liceul „N. Bălcescu“ Brăila.

Clasa VII-a: GOLDENBERG M. E. (VII: 31, 32, 33, 34, 35*, 36).

Liceul „D. A. Sturdza“ Tecuci.

Clasa VII-a: ANDRONIC ST. M. (VII: 14, 26, 31, 32).

Liceul „Codreanu“ Bârlad.

Clasa VI-a: EDELSTEIN L. E. (VI: 26, 27, 34).

Liceul „Roman Vodă“ Roman.

Clasa VI-a: ROSENBERG I. (VI: 10, 11, 12, 21).

Liceul „Cuza Vodă“ Huşi.

Clasa VI-a: CHIRIAC I. S. (VI: 26, 27*, 34).

Liceul „Petru Rareş“ P.-Neamţ.

Clasa VII-a: LAZARIDE N. G. (VII: 14, 31, 32, 33, 34, 36).

Liceul „B. P. Haşdeu“ Chişinău.

Clasa IV-a: SEBEL I. I. (VI: 13, 18, 19*, 20, 21, 25, 26, 27, 34*, 35, 36*, 37, 39, 44*, 46).

Liceul „Ştirbey Vodă“ Călăraşi.

Clasa VII-a: ROŞCULEŢ N. N. (VII: 26, 27, 31, 32, 34, 35*, 36, 37).

Liceul Durostor, Silistra.

Clasa VI-a: TOPSACALIAN A. A. (VII: 23*, 24, 31, 32, 34, 35*, 36, 43).

Liceul „Mircea cel Bătrân“ Constanţa.

Clasa IV-a: ANTON I. ST. (IV: 16, 20d, 24, 31, 34*), CARP V. M. (IV: 16, 21), OPRESCU N. D. (IV: 20, 24, 31), PREDA N. (IV: 16*, 18, 46, 48).

Liceul „Dinicu Golescu“ C.-Lung Muscel.

Clasa VII-a: POPESCU V. F. (VII: 32).

EXERCIȚII PROPUSE

Clasa IV-a. *Exerc. 51.* Să se rezolve ecuațiunea:

$$\frac{x}{5} - \frac{x+1}{6} + \frac{x+2}{7} = 1.$$

și să se verifice soluțiunea aflată.

O. N. Ț.

IV. 52. Să se rezolve ecuațiunea:

$$\frac{x-468}{3} - \frac{x-5468}{4} = \frac{x+2532}{12} + \frac{x-50468}{7}.$$

și să se verifice soluțiunea aflată.

O. N. Ț.

IV. 53. Să se rezolve ecuațiunea:

$$\frac{5x}{84} - \frac{13x}{77} + \frac{7x}{143} - \frac{5x}{924} + \frac{17x}{12012} = \frac{2736-x}{12}$$

și să se verifice soluțiunea aflată.

O. N. Ț.

IV. 54. Să se rezolve ecuațiunea

$$\frac{4x-37}{5x-7} = \left(\frac{11}{13}\right)^2$$

și să se verifice soluțiunea aflată.

O. N. Ț.

IV. 55. Să se rezolve ecuațiunea

$$2\left[\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1}\right] = \frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2}.$$

O. N. Ț.

IV. 56. Să se rezolve ecuațiunea

$$5\left[\frac{x^7-3}{x^7+3} - \frac{x^7+3}{x^7-3}\right] = 3\left[\frac{x^7-5}{x^7+5} - \frac{x^7+5}{x^7-5}\right].$$

O. N. Ț.

IV. 57. Să se rezolve ecuațiunea

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x + 1}$$

O. N. Ț.

IV. 58. Să se rezolve ecuațiunea

$$\frac{x - \frac{1}{2}}{x + \frac{3}{2}} = \frac{x + \frac{5}{2}}{x + \frac{7}{2}}$$

și să se verifice soluția aflată.

O. N. Ț.

IV. 59. Printr'o dreaptă D trec două plane P și Q.

Se dă o dreaptă D' în planul Q paralelă cu dreapta D și un punct A în planul P.

Un segment $\overline{AB}$, având piciorul pe dreapta D' este învârtit până vine a doua oară în poziținea AB' cu piciorul pe dreapta D'. Se unește mijlocul M al segmentului $\overline{BB'}$ cu I piciorul perpendicularei din A la planul Q. Dreapta MI taie dreapta D în punctul N.

Să se arate că dreapta AN este perpendiculară pe dreapta D.

O. N. T.

IV. 60. Se dau două plane paralele P și Q, o dreaptă D în planul P și o dreaptă E perpendiculară pe planul Q întâlnind planele P și Q respectiv în A și B. Să se găsească segmentul de dreapta sprijinindu-se pe dreptele D și E, care măsoară distanța cea mai scurtă între cele două drepte D și E.

O. N. Ț.

Clasa V-a. *Exerc. 56.* Să se rezolve ecuațiunea :

$$(x+1)(a^2-1)(a^3+1)+(x-1)(a^2+1)(a^3+1)$$
$$=(x+1)(a^2+1)(a^3-1)+(x-1)(a^2-1)(a^3-1).$$

N. B.

V. 57. Să se rezolve ecuațiunea:

$$(a+1)(b+1)(x-a)+(a-1)(b-1)(x+a)$$
$$=(a-1)(b-1)(x-a)+(a+1)(b-1)(x+a).$$

N. B.

V. 58. Să se simplifice fracțiunea:

$$\frac{(x+1)(x^2-1)(x^3+1)+(x-1)(x^2+1)(x^3+1)-(x-1)(x^2-1)(x^3-1)}{x^5+x^3-x^2-1}$$

N. B.

V. 59. Să se simplifice fracțiunea:

$$\frac{(x+1)(y+1)(x-y)-(x-1)(y+1)(x+y)+(x+1)(y-1)(x+y)}{x^2-xy+y-x}$$

N. B.

V. 60. Dacă $bc = ad$, să se verifice egalitatea:

$$1-\frac{4(ab+cd)}{(a+b)^2+(c+d)^2}=\left[1-\frac{2}{1+\frac{a+c}{b+d}}\right]^2.$$

C. I. B.

V. 61. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x}{c+b}+\frac{y}{c+a}=\frac{x}{c-b}+\frac{y}{c-a}=1.$$

C. I. B.

V. 62. Se dă triunghiul ABC având $\overline{AB} = 6cm$, $\overline{AC} = 10cm$, $\overline{BC} = 8cm$. Pe AB și AC se consideră punctele D și E astfel ca: $\overline{AD} = 1{,}5cm$, $\overline{AE} = 2{,}5cm$. Dreapta, care unește punctul E cu mijlocul segmentului $\overline{DC}$, întâlnește latura BC în F. Să se arate egalitatea unghiurilor BAF și BFA.

C. I. B.

V. 63. Se dă triunghiul ABC având $\overline{AB} = 8cm$, $\overline{AC} = 6cm$, $\overline{BC} = 10cm$. Pe laturile $\overline{AB}$, AC, BC se iau respectiv punctele D, E, F așafel ca $\overline{AD} = 2cm$, $\overline{AE} = 1{,}5cm$, $\overline{BF} = 2{,}5cm$.

Să se arate că DF și BE se taie în părți egale.

C. I. B.

V. 64. Intr'un triunghiu dreptunghiu, fie i porțiunea din bisectoarea corespunzătoare unghiului drept, cuprinsă între vârf și ipotenuză, c lungimea unei catete.

Să se calculeze aria triunghiului.

C. I. B.

V. 65. Se dă triunghiul ABC înscris în cercul O.

Fie M şi N intersecţiile lui BC cu un cerc O' tangent în A la O. Să se demonstreze că unghiurile MAB , NAC sunt egale şi reciproc, dacă aceste unghiuri sunt egale cercul MAN este tangent în A la O.

GH. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 61.* Fie pe cercul trigonometric cu centrul O, arcele AM = a şi AN = b astfel ca

$$\sin a = \operatorname{tg} b.$$

P fiind punctul în care ON taie perpendiculara coborîtă din M pe OA, să se arate că

$$\overline{OP} = \frac{\cos a}{\cos b}.$$

C. I. B.

VI. 62. Dacă

$$\frac{\sin (a + b)}{\sin (a - b)} = \frac{\sin (c + d)}{\sin (c - d)}$$

există şi relaţia

$$\frac{\cos (a + d)}{\cos (a - d)} = \frac{\cos (c + b)}{\cos (c - b)}.$$

C. I. B.

VI. 63. Dacă

$$\frac{\sin (a + b)}{\sin (a - b)} = \frac{\sin (b + c)}{\sin (b - c)}$$

există şi relaţia

$$\frac{\cos (a + c)}{\cos (a - c)} = \cos 2 b.$$

C. I. B.

VI. 64. Dacă tg$b$ este media proporţională între tg$a$ şi tg$c$

$$\sin (a + b) \sin (b - c) = \sin (a - b) \sin (b + c).$$

C. I. B.

VI. 65. Dacă între unghiurile a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 există egalitățile:

$$\frac{\operatorname{tg} a_1}{\operatorname{tg} b_1} = \frac{\operatorname{tg} a_2}{\operatorname{tg} b_2} = \frac{\operatorname{tg} a_3}{\operatorname{tg} b_3}$$

să se arate că există și egalitățile:

$$\frac{\sin(a_1 + b_1)}{\sin(a_1 - b_1)} = \frac{\sin(a_2 + b_2)}{\sin(a_2 - b_2)} = \frac{\sin(a_3 + b_3)}{\sin(a_3 - b_3)}.$$

C. I. B.

VI. 66. Să se determine unghiurile unui triunghiu isoscel, pentru care baza este egală cu diametrul cercului înscris.

C. I. B.

VI. 67. Să se determine unghiurile unui romb știind că raportul dintre aria pătratului, având ca latură suma diagonalelor rombului și aria rombului, este 12.

C. I. B.

VI. 68. Să se rezolve un triunghiu dreptunghiu ABC pentru care

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} C,$$

iar raza cercului înscris are valoarea $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$.

C. I. B.

VI. 69. Intre laturile unui unghiu ATB, de măsură α, am tras un cerc O tangent în A și B la laturile unghiului. Fie C și D punctele unde dreapta TO taie cercul O.

Să se calculeze lungimile coardelor $\overline{AC}$ și $\overline{AD}$ știind că distanța $\overline{TO}$ este d.

Să se examineze cazurile particulare:

1°) $d = 1$, $\alpha = 60^0$; 2°) $d = 1$, $\alpha = 100^0$; 3°) $d = 1$, $\alpha = 108^0$.

O. N. Ț.

VI. 70. Sunt date două cercuri O şi I, tangente în T, în afară, de raze respectiv R şi r şi astfel că tangentele comune AB şi A'B' (care cuprind între ele cele două cercuri) fac un unghiu de măsură α. Să se calculeze:

a) Lungimea coardelor $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$;

b) Lungimile triunghiului ATB.

Să se aplice în cazul când:

$$R = 400 \ , \ r = 300 \ , \ \alpha = 80^0,$$

şi în cazul:

$$R = 4.105.428 \ , \ r = 894.562 \ , \ \alpha = 60^0.$$

O. N. Ţ.

Clasa VII-a *Exerc. 48.* Să se calculeze coeficientul lui x^{11} din desvoltarea

$$(x^5 + 2x^2 - 1)^5.$$

G. D. S.

VII. 49. Dacă a şi b sunt numere întregi, expresiunea

$$\frac{(a^3 + b^3)^3 + [3ab\,(a + b)]^3}{(a + b)^5}$$

este de asemenea număr întreg.

Lt. C. Gr. Z.

VII. 50. Să se calculeze suma:

$$S = a^3 + (a + 1)^3 + (a + 2)^3 + \ldots + (a + n)^3.$$

Lt. C. Gr. Z.

VII. 51. Să se rezolve ecuaţiunea

$$x^3 + (x + 1)^3 + (x + 2)^3 + (x + 3)^3 + (x + 4)^3 = 0.$$

Lt. C. Gr. Z.

VII. 52. Se dă sistemul

$$x + 2y + \alpha z = 1$$
$$x + \alpha y + 3z = 2$$
$$\alpha x + 2y + 3z = 3.$$

1°. Pentru ce valoare a lui α, avem: $x = y = z$;

2°. Mai general, pentru ce valoare a lui α putem avea:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

şi, în acest caz, ce relaţie trebuie să existe între a, b, c.

G. D. S.

VII. 53. Să se determine valorile arcului x pentru care funcţiunea

$$y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x + 2}$$

este discontinuă; apoi să i se calculeze derivata.

C. I. B.

VII. 54. Pe latura Ox a unghiului xOy se ia segmentul $\overline{OA_1} = a$. Fie $\overline{OA_2}$ proiecţiunea lui $\overline{OA_1}$ pe Oy ; $\overline{OA_3}$ proiecţiunea lui $\overline{OA_2}$ pe Ox ; $\overline{OA_4}$ proiecţiunea lui $\overline{OA_3}$ pe Oy, etc.

Să se calculeze:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\overline{OA_1} + \overline{OA_3} + \ldots + \overline{OA_{2n+1}}}{\overline{OA_2} + \overline{OA_4} + \ldots + \overline{OA_{2n}}}$$

şi să se determine valoarea unghiului xOy pentru care limita e maximă sau minimă.

C. I. B.

ERATA: La V. 48 se va scrie în termenul II, $(a-d)^2$ în loc de $(a-b)^2$.
La V. 54 ultimul rând se va ceti „trece prin mijlocul lui B'C'.
La VI. 53 se va scrie: $(db+dc+bc)\sqrt[3]{a}$ în loc de $(ab+ac+bc)\sqrt{a}$.
La VII. 38 se va înlocui $(d-a)^3$ prin $(d-2b-a)^3$.

Revista „Gazeta Matematică“ apare lunar în 48 de pagini. O recomandăm elevilor din clasele VI şi VII cu bogată activitate la „Supliment“. Abonanentul de lei 200 anual se trimite D-lui Lt. C-dor. Gr. Zapan, Casa Gazeta Matematică „Calea Griviţei 158 — Bucureşti II“.

Soluţiile exerciţiilor propuse se vor redacta conform instrucţiunilor publicate în No. 1, pag. 8 şi se primesc timp de 3 luni dela data propunerii lor.

Drepturile de reproducere sunt rezervate Societăţii „Gazeta Matematică“.

BIBLIOTECA CENTR...
...ASOCIAȚIUNII
SIBIIU

BIBLIOTECA CENTRALĂ „ASOCIAȚIUNII"

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIȚII

ANUL I. No. 7 — 1 APRILIE 1935

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluții, abonamente și orice corespondență pe adresa:
Lt.-Comandor GR. ZAPAN

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviței 158. — București 2

EXERCIȚII REZOLVATE

Clasa V-a. *Exerc. 27. Să se descompună în produs de factori de gradul I expresia*

$$E \equiv a(a^3+3a^2+3a+2)(a^2+3a+3) - 3a(a+1)^2(a+2).$$

C. I. B.

$$E = [(a+1)^3+1][a^3+3a^2+3a] - 3(a+1)^2(a^2+2a)$$

$$= [(a+1)^3+1][(a+1)^3-1] \quad 3(a+1)^2[(a+1)^2-1]$$

$$= (a+1)^6 - 1 - 3(a+1)^4 + 3(a+1)^2 = [(a+1)^2-1]^3 = a^3(a+2)^3.$$

Clasa VI-a. *Exerc. 23. Fie* O *centrul cercului circumscris triunghiului* ABC. *Perpendiculara pe mijlocul laturei* BC *întâlnește cercurile* BOA, COA *respectiv în* M *și* N. *Tangentele în* M *și* N *respectiv la cercurile* AOB *și* AOC *întâlnesc laturile* AB, AC *în punctele* P, Q, *astfel că dreapta* PQ *este paralelă cu* BC.

N. B.

Se observă că punctele M și N se găsesc respectiv pe laturile AC, AB. Ținând seama de măsura unghiurilor înscrise într'un cerc, găsim egalitățile de unghiuri:

$$\sphericalangle ABM = \sphericalangle AOM = \sphericalangle AMP = \sphericalangle AON = \sphericalangle ACN = \sphericalangle ANQ$$

din care rezultă că perechile de drepte (MP, CN), (NQ, BN) sunt paralele. Deci avem relațiile:

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AP}{AN} \quad , \quad \frac{AQ}{AM} = \frac{AN}{AB}$$

care înmulțite ne dau relația:

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{AP}{AB} .$$

Clasa VII-a. *Exerc. 19. Pe cercul* O *se iau un punct fix* I *și un punct mobil* M. *Se construește triunghiul echilateral* IMP *și se cere locul descris de punctul* P *când* M *descrie cercul* O.

N. B.

Locul se compune din două cercuri egale cu cercul O, care se obțin din acesta rotindu-l de 60^0 în jurul punctului I.

VII. 21. Dacă N *este un număr întreg atunci* $N+1$ *și* N^2-2 *sunt prime între ele iar* $N+1$ *și* N^2+2 *nu pot admite alt divizor comun în afară de* 3.

GH. B.

Din

$$M = N^2 - 2 = (N-1)(N+1) - 1$$

se deduce că un divizor al lui M și al lui $N+1$ trebue să dividă și pe 1; deci M și $N+1$ sunt primi.

De asemeni din

$$P = N^2 + 2 = N^2 - 1 + 3 = (N-1)(N+1) + 3$$

se vede că dacă P și $N+1$ au un divizor comun, acel divizor împarte și pe 3.

Analog se arată că $N+1$ și $N^2 - n$ nu au alți divizori comuni în afară de divizorii lui $n-1$ iar $N+1$ și N^2+n nu pot avea alți divizori comuni în afară de divizorii lui $n+1$.

Până la 1 Martie s'au primit soluţii bune pentru problemele propuse în numerele 3, 4, 5 dela: [1]).

Şcoala Centrală de fete „Maria Brâncoveanu" Bucureşti.

Clasa IV-a: ALEXE C. LUCIA (IV: 21, 22, 23, 25, 34, 35, 41, 45*, 46, 49. VI: 49), BARBU M. IOANA (IV: 41, 46, 47, 48), CHIRIŢESCU P. CORA (IV: 21, 24, 31, 34, 35, 46, 48), IONESCU FLORICA (IV: 45), NICOLAU A. ELENA (IV: 21, 25, 34, 35, 41, 45, 46, 48. VI: 49).

Clasa V-a: ROMAŞCAN G. GEORGETA (V: 41*, 50*, 52*, 53, 54*), STĂNESCU M. VIRGINIA (V: 50*, 52*, 54*).

Clasa VI-a: CONEA D. MARIA (VI: 50, 52*, 53*, 54*).

Liceul de fete „Regina Maria" Bucureşti.

Clasa III-a: COHN LYDIA (IV: 29, 34*, 35), CLEJAN ALICE (IV: 21, 34*).

Clasa VI-a: TĂNĂSESCU VENERA (VI: 50, 52*, 53*, 54*, 56*, 57*).

Liceul de fete „Domniţa Ileana" Bucureşti.

Clasa IV-a: ERBLICH D. ELSA (IV: 31, 32, 33, 34).

Clasa VI-a: GHINESCU D. MAGDALENA (VI: 52*, 53*, 54*, 55), NICOLESCU F. PROFIRA (VI: 44*, 45*, 52*, 55), PUTINEANU M. ECATERINA (VI: 44*, 45*, 46, 52*, 53*, 54*), ŞTEFĂNESCU P. AURORA (VI: 44*, 52*, 53*, 54*, 55).

Institutul de fete „Moteanu" Bucureşti

Clasa III-a: MUNROE M. MANUELA (IV: 21*, 22*, 23*, 30*).

Clasa V-a: IACOBESCU S. LUCIA (V: 33, 34, 35, 36, 37, 38), MALAXA N. IRINA (V: 26*, 39*, 50*).

Institutul Ortodox Internat Bucureşti.

Clasa IV-a: MĂRGĂRITESCU MARIA (IV: 41*, 44, 45, 46, 48).

Externatul secundar „Zoe Râmniceanu" Bucureşti.

Clasa V-a: OANCEA CLEO (V: 26, 38, 39*, 47*, 50*), STOIDIS D. ECATERINA (V: 50. VII: 41).

Clasa VI-a: LAZAROVICI I. ROZICA (VI: 48, 49, 50, 51, 52, 53*, 54*, 55, 56*, 57*. VII: 41), ROCIU I. MARGARETA (VI: 48, 49, 50, 51, 52*, 53*, 54*, 55, 56*, 57*).

Clasa VII-a: CHRISTESCU M. MARGARETA (VII: 27, 31, 32, 41, 46*, 47*), IONESCU M. OANA (VII: 26, 27, 31, 32, 41, 46*, 47*).

Pensionul de fete „Regina Elisabeta" Ploeşti.

Clasa IV-a: BUCUR N. MARGARETA (IV: 31, 32, 34. VI: 26*).

Liceul de fete „Principesa Dadiani" Chişinău.

Clasa IV-a: LACTOINOV GALLYNA. (IV: 32, 33).

Şcoala normală „Andrei Şaguna" Sibiu.

Clasa V-a: IONESCU G. LAETITIA (V: 33).

---

1) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu rezolvat foarte bine.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ASOCIAŢIUNII SIBIU

Seminarul Pedagogic Universitar Bucureşti

Clasa IV-a: BODNĂRESCU M. H. (IV: 41*, 43*, 44, 45, 46, 47, 48, 49*, 50*. V: 46*, 49*, 50*. VI: 52*, 53*, 54*. VII: 44), SLOVENZ T. P. (IV: 21, 22*, 24, 30, 31).

Clasa VII-a: KATZ F. R. (VII: 22*, 23, 24*, 25*, 26*, 27, 28*, 30*).

Liceul „Gh. Lazăr" Bucureşti.

Clasa V-a: ARAMĂ I. C. (V: 46*, 47, VI: 51*, 52*, 53*, 54*), DROUHET ED. (V: 40*, 42*, 46*, 47*, 51*, 53*. VI: 51*, 52*, 53*, 54*), MUNROE M. M. (V: 35*, 37*, 39*, 40*. VI: 36*, 44*, 45*, 46*), STOICESCU C. C. (V: 46*. VI: 51*, 52*).

Clasa VI-a: BĂDULESCU M. (VI: 37*, 38*, 39, 51*, 52*, 53*, 61*), BALLAN A. M. (VI: 37*, 40*, 41*, 42*, 43*, 44*, 46*. VII: 31*, 32*, 43*, 44*), BEGU I. ST. (VI: 38*, 39*, 52*, 53*, 54*, 55*, 61*), DRĂGHICESCU F. M. (VI: 37*, 38*, 39*, 52*, 53*, 54*, 55*. VII: 31*, 47*), GOLDENBERG I. H. (VI: 44*, 45*), IORDACHE I. C. (VI: 37*, 38, 39*, 48, 52, 54, 55*. VII: 22, 23, 44), MIHAIL G. G. (VI: 52*), NICULESCU V. A. (VI: 48, 52*, 53*, 54), PETRESCU C. (VI: 44), ROTSTEIN M. C. (VI: 26*, 44*, 45*, 46*), SCHRAMM B. (VI: 52*).

Clasa VII-a: CHIRICUŢĂ T. I. (VII: 31, 32*, 34, 35, 36, 53), PETRESCU C. V. (VII: 26).

Liceul „Matei Basarab" Bucureşti.

Clasa V-a: CHIRIACESCU N. (V: 27, 28, 29, 30), NICULESCU I. D. (V: 27, 28, 29, 30, 37, 38, 39*, 40*, 41*, 42*, 46, 50*, 52*, 54*, 55*), PRECIADO T. T. (V: 33, 37, 38, 46, 47. VI: 52*), ŞAICHIN O. A. (VI: 51, 52. VII: 30, 45*, 47*).

Clasa VI-a: SCHAPIRA J. (VI: 52).

Colegiul Naţional „Sf. Sava" Bucureşti.

Clasa IV-a: BĂDULESCU P. N. (IV: 32, 41*, 44, 45, 46, 47, 48. V: 33, 37, 38, 46*, 47*. VI: 52*), CIOCÂLTEU V. V. (IV: 33, 34, 41*. V: 26. VI: 45*, 52*), CIURESCU I. R. (IV: 25), DUMITRESCU N. N. (IV: 32).

Clasa VII-a: NEAGU V. V. (VII: 43, 44, 45*, 46, 47*).

Liceul „Gh. Şincai" Bucureşti.

Clasa IV-a: CETĂŢEANU G. S. (IV: 22, 23, 24, 25, 26, 44, 45*, 46. V: 24).

Clasa V-a: ARGHIRIU I. T. (V: 25, 34, 35, 37, 38, 46, 47. VI: 26, 44, 45, 46, 52*, 54*).

Clasa VI-a: CHIALE A. T. (VI: 26, 34, 36*, 37, 44, 45*, 46, 51*, 52), ENE F. C. (VI: 26, 27*, 28, 34, 35, 36*, 37*, 40*, 41*, 42*, 44*, 45*, 46*. VII: 22, 30), PERIEŢEANU D. M. (VI: 26, 27*, 28, 34*, 35*, 36*, 37, 44*, 45*, 46*, 52*, 53*, 54*. VII: 22).

Clasa VII-a: ENE F. I. (VII: 22*, 24*, 26*, 27*, 30*, 31*, 32*, 33*, 34*, 35*), LILIACOVEANU S. F. V. (VII: 39*, 43, 44*), PARASCHIVESCU-VORNICENI I. T. (VII: 26, 27, 31, 32, 34).

Liceul „Mihai Viteazul“ Bucureşti.

Clasa IV-a: BELDIMAN V. A. (IV: 46, 49), CARNARU I. D. (IV: 21, 24, 26), HOREZEANU S. M. (IV: 44, 45), NICULESCU CR. (IV: 32, 33, 44, 45, 46, 48), POPESCU C. V. (IV: 32*), SERDICI G. V. (IV: 44, 45*, 46).

Clasa V-a: BALLY L. N. (V: 29, 30, 50. VI: 52*), ENCIULESCU G. I. (V: 25, 46. VI: 52. VII: 22), LASCĂR O. M. A. (V: 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31), STOENESCU ST. N. (V: 46, 47, 50. VI: 52*. VII: 44), STRUŢEANU S. M. (V: 24, 25, 26, 27, 28, 30, 31, 32).

Clasa VI-a: BEIU-PALADI G. E. (VI: 35, 36, 37, 39, 50, 52*, 54*, 55, 57*), CRISTESCU I. G. (VI: 51, 52*, 53*, 54*, 55), ŞTEFĂNESCU C. (VI: 48, 49, 51, 52, 53*, 54*, 55).

Clasa VII-a: RENEA C. R. M. (VII: 31, 32, 33).

Liceul „Cantemir Vodă“ Bucureşti.

Clasa V-a: SOREANU A. S. (V: 26*, 34*, 35*, 36*, 37, 38, 39*. VI: 26*, 51*, 52*).

Liceul „Spiru Haret“ Bucureşti.

Clasa VI-a: BOISNARD M. L. (VI: 49, 51*, 52*, 53*, 54*, 56*, 57*), NAHMIAS G. (VI: 51*, 52*, 54*), SOLAVICI S. M. (VI: 26, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36).

Liceul „Aurel Vlaicu“ Bucureşti.

Clasa IV-a: ZARNEA N. G. (IV: 44, 45, 46, 48).

Clasa VI-a: BUZESCU V. (VI: 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 48, 49, 51*, 52*, 53, 54*, 55).

Liceul „Marele Voevod Mihai“ Bucureşti.

Clasa VII-a: STOICA D. AL. (VII: 31, 32*, 33, 34*, 35, 36*).

Liceul „Sf. Iosif“ Bucureşti.

Clasa IV-a: GELLER L. M. (IV: 22, 23, 26, 32, 33, 34), IONESCU T. T. (IV: 32).

Clasa V-a: POPESCU N. AL. (V: 46, 47, 53*. VII: 44).

Clasa VI-a: ŞARAGA F. V. (VI: 35, 36, 39, 44, 45, 46).

Clasa VII-a: RATZI N. A. (VII: 32, 33, 35*, 45*, 47*).

Liceul „Sf. Gheorghe“ Bucureşti.

Clasa VII-a: EFTIMIU V. T. (VII: 43, 44, 45*).

Elevi particulari Bucureşti.

Clasa VI-a: MECU I. M. (VI: 29*, 30*, 31*, 32*, 33*, 38*, 39*, 55*, 61*).

Clasa VII-a: GAFENCU A. N. (VII: 31, 32, 34, 36, 44).

Liceul „Laurian" Botoşani.

Clasa IV-a: CIOMAGA I. I. (IV: 22*, 24, 30, 31, 32, 33, 34, 41, 44, 45, 46, 47, 48), MAZILU C. D. (IV: 21*, 22*, 23*, 24, 25*, 26, 31, 32, 34, 44, 45, 46, 48), SÂRBU A. V. (IV: 21, 22, 23, 24, 30, 33, 34, 44).

Clasa V-a: MARCOVICI H. M. (V: 24, 25, 39).

Clasa VI-a: BOTEZATU C. F. (VI: 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 39, 44, 45, 46, 50, 51, 52*, 53*, 54*, 55, 57*), PANAITE N. V. (VI: 26, 27, 52*, 54, 55*), SILIŞTEANU D. I. (VI: 52*, 53*, 54*, 55).

Clasa VII-a: FILIP V. C. (VII: 31, 32), GRIGORIU N. A. (VII: 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 40, 43, 44, 45*, 46*, 47), TEODORESCU M. I. (VII: 31, 32, 34, 36, 37), TUFESCU C. C. (VII: 31, 32, 44, 47).

Seminarul Pedagogic Universitar Cernăuţi.

Clasa V-a: CAPRI V. A. (V: 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34*, 35*, 36*, 37, 38, 39*, 40*, 41*, 44. VI. 26, 34), EINHORN E. (V: 33), GOTT I. (V: 33, 34, 35, 36, 37, 38*, 39*), HERLING H. E. (V: 35, 38, 42*, 44, 50*), PETRIDES I. S. (V: 34*, 35*, 37), ŞERBANOVICI P. (V: 24, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 34, 36, 37*, 41*), WEISSELBERG M. M. (V: 33*, 37*, 38, 39*, 40*).

Liceul militar „Ştefan cel Mare" Cernăuţi.

Clasa IV-a: BOBULESCU A. (IV: 32*), BĂLĂUŢĂ G. (IV: 32*), CAPRIŞ V. M. (IV: 32*), COSMA A. (IV: 32*), DOMBROVSCHI P. I. (IV: 32*), LAZĂR D. (IV: 32*), MANOLESCU R. G. (IV: 32*), MOŢOC R. (IV: 32*), POALELUNGI V. (IV: 32*), ŞERBĂNESCU N. S. (IV: 32), STĂNESCU ST. V. (IV: 32), STOIAN RĂDUCĂNESCU D. (IV: 32*), STOICESCU Ş. (IV: 32*), VASILIU N. (IV: 32*).

Clasa V-a: APOSTOL N. (V: 37*, 38*, 39*, 40*, 41*), ARHIPESCU M. C. (V: 39), BANCEA N. N. (V: 33*), BĂNICĂ M. G. (V: 33*, 37), BARTIC G. G. (V: 33*), CRUTESCU TROTUŞ (V: 33*, 37*, 38*, 39*, 40*, 41*), FLOAREŞ I. A. (V: 40*, 41*), MAREŞ D. P. (V: 33*, 37*, 38*, 39*, 40*), NEDELCU V. N. (V: 37, 38*, 39*, 40*, 41*, 42*), NISTORESCU V. D. (V: 33*), POPA C. B. (V: 33*, 37*, 38*, 39), ŞTEFANOV P. ŞT. (V: 38*), TEODORESCU V. N. (V: 33*, 37, 39).

Clasa VI-a: BREDAN G. E. (VI. 43*), CARAMAN D. V. (VI: 45*), GAFIŢEANU I. I. (VI: 45, 52*), GALAN I. I. (VI: 43*, 45, 46, 50, 51, 52*, 53*, 54*, 56, 57*), IVAN S. A. (VI: 45, 46), LEFTER T. G. (VI: 43*, 45), LUGOJANU D. (VI: 43*, 45), POPLEŞEANU G. I. (VI: 43*, 45, 46), POPESCU G. N. (VI: 43*), RUNCEANU N. C. (VI: 43*, 45, 46, 50, 51, 52*, 53*, 54*, 56, 57*), ŞERBĂNESCU A. M. (VI: 43*, 45, 46), STOICA P. I. (VI: 43*, 45, 46, 50, 51, 52*, 53*, 54*, 56*, 57*), TANASICIUC V. C. (VI: 50, 51, 52*, 53*, 54*, 56, 57*, 60*).

Clasa VII-a: ARSENE GR. S. (VII: 35*), BOITAN P. N. (VII: 35*), CEHAN G. A. (VII: 35*), CRAIU S. P. (VII: 35*), GĂBUREANU M. (VII: 35*), LASCARACHE G. (VII: 35*), OPAN C. (VII: 35*), ROMAN I. N. (VII: 35*), ROTARU G. (VII: 35*), VASILIU M. O. (VII: 35*), VERJINSKI N. (VII: 35*), VUSATIUC D. M. (VII: 35*), ZGÂRCEA G. (VII: 35*).

Liceul „B. P. Hașdeu" Chișinău.

Clasa VI-a: SEBEL T. I. (VI: 40*, 47, 48, 49, 51*, 52*, 53*, 54*, 55*, 58. VII: 30).

Liceul Militar „Regele Ferdinand" Chișinău.

Clasa V-a: CONSTANTINESCU ȘT. (V: 33*, 34*, 35*, 37*), PĂDUREȚ A. V. (V: 33*, 34*, 35*, 36*, 37*, 39*), SDOVEI V. A. (V: 33*, 34*, 35*, 36*, 37*, 38*, 39*).

Clasa VI-a: BULAT L. M. (VI: 52*, 54*, 55. VII: 44).

Clasa VII-a: FLORESCU G. H. (VII: 21, 34, 35, 44), MILLU I. N. (VII: 30*, 34, 35, 36, 43, 44, 47*).

Liceul „Ștefan cel Mare" Tighina.

Clasa VII-a: CERNAȘOV P. G. (VII: 41, 42, 43, 44, 45*, 46*, 47*).

Liceul Militar Iași.

Clasa VI-a: BACIU N. G. (VI: 26, 27, 29, 31*, 32*, 33*, 44, 45, 46, 51, 52*, 53*, 54*, 55, 57*), BOGDAN G. I. (VI: 52*), BOGZA GR. V. (VI: 31*, 32*, 44*, 45, 46, 52*, 55), BUCUR N. V. (VI: 31, 32, 50, 52*, 53*, 54*, 55, 56), BUZINCU I. I. (VI: 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 39*, 40*, 44*, 45*, 46*, 51*, 52*, 53*, 54*, 55*. VII: 31, 32, 36, 44, 46*, 47*), COJOCARU P. (VI: 31*, 32*, 40*, 49, 51*, 52*, 53*, 54*, 55, 56*, 57*. VII: 31, 36, 44, 46*), COTESCU C. (VI: 31, 32, 50, 52, 53, 54*, 55, 56*, 57*, 60*), DUMBRĂVESCU A. (VI: 52*), DUMITRU ISAC (VI: 29, 31*, 32*, 46), ENĂȘESCU D. V. (VI: 26, 27, 29*, 30*, 31*, 32*, 33*, 34*, 44*, 45*, 46*, 51*, 52*, 53*, 54*, 55*, 57*), IONESCU V. (VI: 26, 27*, 29*, 30*, 31*, 32*, 33*, 35, 36, 39*, 44*, 45*, 46*, 49, 51*, 52*, 53, 54*, 57*, 60*. VII: 31, 32, 36, 44, 46, 47*).

Liceul „Cuza Vodă" Huși.

Clasa VI-a: CHIRIAC I. S. (VI: 26, 34, 44*, 45*, 46*, 50. 51*, 52*, 54*, 55, 57*).

Liceul „Roman Vodă" Roman.

Clasa VI-a: ROSEMBERG (VI: 26, 28, 34, 36*, 44*. VII: 30).

Liceul „Codreanu" Bârlad.

Clasa VI-a: SPANACHE ST. I. (VI: 52).

Clasa VII-a: HUTANU C. P. (VII: 35, 44, 46*, 47).

Liceul „Unirea" Focșani.

Clasa VI-a: FOCȘENEANU S. (VI: 34, 43*, 45, 48, 52*, 53*, 54*, 60).

Liceul „Tasse Dumitrescu" Mizil.

Clasa IV-a: GEAMBAȘU V. T. (IV: 44, 45, 46, 48).

Clasa V-a: FIANU I. G, (V: 33, 39*), IONIȚĂ D. MARIN (V: 24, 26, 29, 30, 33, 37, 38, 39*, 46, 50*), ȘTEFĂNESCU I. M. (V: 24, 26, 30, 35, 37, 38, 39*, 50*), TOMA C. G. (V: 24, 26, 29, 30, 33, 37, 38, 39*, 46, 50*.

Clasa VI-a: GRIGORESCU A. T. (VI: 48, 51, 52*, 53*, 55, 57*).

Liceul „B. P. Haşdeu" Buzău.

Clasa V-a: NICOLAU L. L. (V: 41).

Liceul „N. Bălcescu" Brăila.

Clasa VII-a: GOLDENBERG M. (VII: 39, 43, 44, 46*, 47*).

Liceul „Mircea cel Bătrân" Constanţa.

Clasa IV-a: MÂŞCĂ I. A. (IV: 32, 41, 45, 46, 48), MECULESCU T. G. (IV: 32, 34), OPRESCU N. D. (IV: 21, 22, 23, 24, 25, 26*, 31, 32, 33, 34*, 41, 45, 46, 48), RĂDULESCU I. V. (IV: 41, 45, 48).

Liceul „Durostor" Silistra.

Clasa VII-a: TOPSACALIAN A. A. (VII: 39*, 41, 44, 45*, 46*, 47).

Liceul Militar „N. Filipescu" Mănăstirea Dealu.

Clasa IV-a: RĂDULESCU G. O. (IV: 32, 34, 44, 45, 46. V: 31*, 33*, 34*, 35*, 36*, 37, 38, 39, 41*. VI: 44, 45*, 46*, 51, 52*, 53, 54*. VII: 34, 35*).

Clasa V-a: NEGULESCU D. ST. (V: 26, 27, 31*, 32*, 35*, 36*, 38, 41*, 42*, 46, 47*, 50. VI: 45, 51*, 52*, 53*).

Clasa VI-a: MARINESCU M. E. (VI: 26, 27, 39*, 44, 52*, 53*, 55).

Clasa VII-a: DASCĂLU I. (VII: 32, 45*, 46*, 47), LĂZĂROIU I. R. (VII: 31, 39*, 43, 44, 45*, 46*, 47*).

Liceul „Dinicu Golescu" Câmpulung Muscel.

Clasa VII-a: NICOLESCU-DOCSACHE G. (VII: 32*, 34, 35, 36), POPESCU F. (VII: 34, 35, 36*, 43, 44, 46*, 47*).

Colegiul Naţional „Carol I" Craiova.

Clasa IV-a: BĂDULESCU P. N. (IV: 21, 22, 23, 24, 25, 26*, 30, 33. V: 24, 26, 29, 30, 34, 35, 36). CETATE CICEIU (IV: 21, 22, 24, 25, 26*, 31, 32*, 33, 34, 36. V: 34*), COSTIN M. (IV: 34*, 35), DINCULESCU A. M. (IV: 22, 26, 34*, 36), GEORGESCU B. (IV: 24, 31, 46, 48), IONESCU G. N. (IV: 21, 26, 33, 34*, 35, 36, 44, 45, 46, 49), IOVĂNESCU E. R. (IV: 26, 34*, 44, 45, 46, 47, 48), POPESCU D. O. (IV; 21*, 22*, 23*, 25*, 26*, 31*).

Clasa V-a: BRĂDIŞTEANU C. (V: 34. 35, 36), DĂNESCU P. A. (V: 34*, 35*, 37), DUMITRU I. ŞT. (V: 24, 26, 33, 34, 35, 36*, 37), FIRU I. G. (V: 39*, 42*, 47, 50*, 53*), FRĂSIE S. S. (V: 24, 26, 33, 37, 38, 46, 50*), GEORGESCU D. A. (V: 24, 26, 27, 35*, 37), MARINESCU V. N. (V: 33*, 34, 35, 36, 38*, 39*), PETECEL D. I. (V: 33, 37, 38, 39*, 52*. VII: 44), POPESCU H. D. (V: 33, 34*, 36*, 37, 39*), STRÂMBEANU ST. (V: 33*, 34, 35, 36, 37, 38*, 39*, 44), TEIŞEANU A. G. (V: 33*, 34*, 35*, 36*, 37*, 38*).

Clasa VI-a: BUGEANU O. P. (VI: 26*, 27*, 28*, 29*, 30*, 31*, 32*, 33*, 34*), MOISOVICI (VII: 31, 32).

Clasa VII-a: GHIDIGEANU I. G. (VII: 22, 27, 28, 35*), IONESCU S. T. (VII: 22, 26, 27, 28, 30*, 31, 32, 35*), MARINESCU M. (VII: 35*, 44), TĂNĂSESCU N. I. (VII: 22, 23*, 26*, 27, 30*, 34*, 35*, 36*).

Liceul „Fraţii Buzeşti" Craiova.

Clasa VII-a: AMĂRĂŞTEANU M. (VII: 30, 31, 32*, 33, 34, 35, 36, 37, 41, 42, 44, 45*, 46*, 47*).

Liceul Militar „D. A. Sturdza" Craiova.

Clasa V-a: ANDREESCU G. (VI: 54*), BĂDESCU G. N. (V: 28, 29, 30*, 31*, 32*. VII: 22), BOIAN D. E. (V: 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32. VI: 26, 27, 34), CIOC I. D. (V: 31, 34, 35, 36, 37*, 38, 39*, 40, 41*, 42*, 43, 44*. VI: 35, 36, 43, 44, 45, 46), CONSTANTINESCU I. T. (V: 26, 27), CONSTANTINESCU SP. (V: 24, 26, 27, 28*, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39*, 40, 41*, 42*, 44, 46*, 47*. VI: 27, 28, 34, 44, 45, 46, 53*, 54*. VII: 31, 32), DRAGOMIRESCU I. I. (V: 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32), DRĂGUŞIN D. D. (V: 28*, 30, 32*. VII: 22), GRAUR M. I. (V: 26), GRIGORE M. I. (V: 24, 33*, 34, 35, 36, 37, 38, 39*, 40, 41*, 42*. VI: 27, 28*, 44, 45), GRIGORESCU T. (V: 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32), IONESCU-FULGER M. C. (V: 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32), MOROIANU V. C. (V: 26), OPREA G. S. (V: 31, 32, 41*, 42*, 44), PAŞOI N. M. (V: 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39*, 40, 41*, 42*, 44, 46*, 47*. VI: 27, 28, 44, 45, 46, 52*, 53*, 54*. VII: 22), POPESCU A. V. (V: 26), POPESCU G. (V: 33*, 34, 35, 36, 37, 38*, 39*, 41*, 44, 46), POPESCU I. I. (V: 26), RĂDULESCU G. I. (V: 24, 26, 27, 28, 29, 30 31, 32. VI: 26, 27), TOFAN M. T. (V: 26).

Clasa VI-a: RACOŢEANU C. (VI: 28, 30, 35, 43).

Clasa VII-a: AVRAM I. (VII: 30*, 44, 47), BERCULESCU I. (VII: 42, 44, 46), CAVAROPOL M. (VII: 30, 42, 44, 46), CAVAROPOL N. (VII: 30, 44, 46), COMĂNESCU T. (VII: 26, 31, 32, 33, 34, 36, 43, 44, 46, 47*), CRISTESCU I. I. (VII: 30, 42, 44, 46), CUNĂ I. S. (VII: 44, 46), DIACONESCU I. V. (VII: 31, 32, 33, 34, 35*, 36, 43, 44, 46, 47), DULĂMIŢĂ G. I. (VII: 30*, 42, 44, 46, 47), GHEORGHE I. MIHAI (VII: 44, 46*, 47), ILIESCU V. D. (VII: 31, 32, 33, 34, 36, 37, 43, 44*, 45*, 46*, 47*), IONESCU I. (VII: 31, 43, 44, 46*, 47), IONESCU T. (VII: 34), MARINESCU N. M. (VII: 31, 32, 34), MITRE P. G. (VII: 31, 34, 35*), PESTRIŢU-BĂILEŞTI M. (VII: 30*, 32, 42, 44, 46), SAVIN I. (VII: 30*, 42, 44, 46), TEIŞANU C. S. (VII: 26, 27, 32. 44*, 47*).

Liceul „C. Diaconovici Loga" Timişoara.

Clasa IV-a: CIUGUDEAN I. C. (VI: 44, 46, 52), EVUŢIANU S. G. (VI: 24. 26*, 31, 32, 33).

Clasa V-a: CAPEŢIANU N. T. (V: 24, 25, 26, 27. 28*, 29*. 30*), HORAE A. C. (V: 50, 51), LUPAN N. V. (V: 33, 50*, 51. VI: 44), POPESCU T. (V: 46, 50*. VI: 52*, 54*, 55*)., ŞERBAN J. C. (V: 26, 28*, 29, 30*. VI: 28*).

Clasa VI-a: IOANNES DE APŞA V. (VI: 37, 44, 52*, 53*, 55), MANCIU I. A. (VI: 35, 36, 44, 45).

Liceul „Banaţia" Timişoara.

Clasa VII-a: MÜLLER I. (VII: 26*, 27, 30*, 32, 44*).

Liceul „Moise Nicoară" Arad.

Clasa IV-a: BINDER I. (IV: 44, 46, 49).

Liceul „Samuil Vulcan" Beiuş.

Clasa IV-a: JIDANU I. C. (IV: 31, 32, 33, 34, 47), LAKATOS I. L. (IV: 32, 33. V: 37, 38, 46, 50*), LUCACIU ST. E. M. (IV: 26).

Clasa V-a: BALOG C. (V: 33, 37, 38. VI: 52*, 53*, 54*), BOLCAŞ P. I. (V: 33, 37. VI: 52*, 53*, 54*), HERA V. I. (V: 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40), KILLNER G. (V: 41*, 44*. VI: 52*, 53*, 54*), MEZEA G. G. (V: 33, 34, 35, 36, 37. 38. VI: 44), SILBERSTEIN S. V. (V: 33*, 34, 37, 38, 39*, 41*, 46, 47*, 50*. VI: 44, 45, 46, 52*, 53*, 54*), TEIUŞAN I. (V: 33*, 34, 35, 36, 37, 38, 39*. VI: 44*, 45*, 46*).

Clasa VI-a: CHIRVOIU V. (VI: 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 36*, 39, 43, 44, 45, 46, 52*), HOMPOLA T. (VI: 29, 30, 31, 32, 33, 43, 48, 49, 51, 52*, 53*, 54*, 55, 60. VII: 44*), MARICA A. P. (VI: 30, 32, 33, 35, 36*, 37, 39*, 43, 44*, 45*, 46*).

Liceul „G. Barițiu" Cluj.

Clasa V-a: NIȚESCU G. G. (V: 31*, 32*, 33*, 34*, 35*, 36*, 37*, 38*, 39*, 41*, 42*, 44*. VI: 35, 36, 44*, 45*, 46*).

Seminarul Pedagogic Universitar Cluj.

Clasa IV-a: ESEA A. A. (IV: 21, 24, 33, 34), SLOVENZ I. P. (IV: 34*, 35*, 36*).

Liceul Militar „Mihai Viteazul" Tg.-Mureş.

Clasa IV-a: BĂLĂCEANU P. I. (IV: 44, 45, 46), BARZAN M. (IV: 21, 24, 25, 31, 32, 33, 44, 45*, 46, 48. V: 33*), BEJENARU G. V. (IV: 21, 24, 25, 26, 31, 32*, 34, 44, 45*, 46*, 48), DOBRAN I. C. S. (IV: 46), DOBRESCU L. G. (IV: 32, 33, 44, 45*, 46, 48), DUMITRESCU V. M. (IV: 21, 25, 32, 33, 34*), DUMITRIU P. (IV: 34*), ENĂCHESCU GH. M. (IV: 44, 45, 46), GEORGE A. G. (IV: 34*), GRIGORESCU G. (IV: 31, 32, 33, 46), IACOB D. S. (V: 33, 44, 46, 48), MICLEA I. C. (IV: 32*, 34*), MIERTOIU D. M. (IV: 32*, 34*), MITRICĂ G. I. (IV: 44, 45), OANTĂ F. (IV: 31, 32, 33, 44, 45, 46), PASERĖ S. A. (IV: 22, 23, 25, 48), PĂUNESCU N. V. (IV: 44, 45*, 46, 48), PETRESCU A. T. (IV: 44, 46, 48), POPESCU LUMINĂ N. C. (IV: 31, 32*, 33, 34), RĂDULESCU M. (IV: 45, 46), SĂNDULESCU I. (IV: 32, 33), ȘTEFĂNESCU A. (IV: 34*, 46), VIŞAN N. J. (IV: 46).

Clasa V-a: ANCA I. (V: 33, 37, 46. VI: 44, 45, 52*, 53*, 54*. VII: 44), ANDRONACHE I. V. (V: 53*. VI: 52*, 53*, 54*), BĂDESCU F. I. (V: 24, 26, 33, 34, 35, 36, 41*, 42*), BOBORODEA I. I. (V: 25, 28, 29, 30, 33, 34, 35, 36, 37, 44, 53*. VI: 44, 45, 46, 49, 51*, 53*, 54*. VII: 44), BUTA ȘT. (VI: 52*), CAPOTA G. G. (V: 24, 29, 30), CHIRIȚĂ G. (V: 44, 53*. VI: 44, 45, 46, 52*, 53*, 54*), COMĂNECI V. A. (V: 31. VI: 44), DĂLBAN C. G. (V: 24, 26, 33, 41*, 42*, 44), DANIELESCU I. A. (V: 34), HORTOPAN G. G. (V: 31, 32),

HUREZEANU E. C. (V : 26, 33, 34, 35, 36, 37), ISAC V. (V : 26, 32), MATEI D. V. (V : 24, 26, 29*, 31*, 32, 34, 35, 36, 38), MOSORA N. N. (V : 29*, 30, 31, 32, 34, 35*, 36), MUNTEANU V. L. (V : 31, 34, 35, 37, 44, 53*. VI : 44, 45, 46, 52*, 53*, 54*. VII : 44), MOLDOVAN N. ROMAN (V : 24, 26, 31, 32, 38), PASCU V. V. (V : 34. VI : 44, 45, 46, 52*. VII : 44), ROVENȚA O. (V : 31, 34, 53. VI : 44, 46, 52*. VII : 44), SECHEL M. (V : 33, 36*, 38, 41*), STOIA T. L. (VI : 52), TERPU A. (V : 24, 33, 37, 50*, TOMA N. N. (V : 33, 37), ZLATIAN P. C. (V : 44. VI : 52*).

Clasa VI-a : ANTONIU C. S. (VI : 35, 36*, 44*, 45*), ARON R. (VI : 49). BEȘCHEA C. (VI : 35), BUCURENCIU I. V. (VI : 35, 36*, 44, 45, 46, 52*, 53*), CHERCIU I. G. (VI : 26, 44, 45), FENICHI A. (VI : 28*, 34*, 35, 36*), GREAB I. V. (VI : 27, 28*, 35, 36*), MATEI I. I. (VI : 35, 36*, 44*, 45, 49, 51*, 52*, 53*, 54, 55. VII : 44), MĂCIUCEANU D. P. (VI : 34, 35, 36*, 44*, 45*, 46*) METEA S. V. (VI : 26, 27*, 28*, 34*, 35, 45*. VII : 31, 32), MILITARU A. (VI : 49), MORANU I. V. (VI : 26, 34, 35, 36*, 44*, 45*, 46), OPRESCU I. I. (VI : 40), PĂDUREANU M. (VI : 27), POPA-OPREA D. (VI : 35*, 36*, 44*, 45*, 46*), ȘERBĂNESCU V. (VI : 44*, 45*, 46, 52*, 53*, 54*), STOIAN S. I. (VI : 35, 36*, 44*, 45, 46, 52*, 53*, 54*, 55), STURZA P. T. (VI : 35 44*), TĂNĂSESCU H. (VI : 49), VARTIC D. I. (VI : 49), VASU A. N. (VI : 35, 36*, 44*, 45, 46, 51*, 52*, 53*, 55. VII : 44), VOICULESCU G. (VI : 49).

Clasa VII-a : BACĂREA A. (VII : 34, 36), BUHĂESCU M. I. (VII : 26), DECEANU G. (VII : 30, 39, 44, 45*, 46, 47*), FIRULESCU I. I. (VII : 43, 44), JARDA R. (VII : 44, 47*), ORĂȘANU G. I. (VII : 34, 36, 44), STOICA N. (VII : 32, 42), ȚARĂLUNGĂ D. (VII : 30, 40, 41, 44, 45*, 46, 47*).

(Publicarea complectă a Corespondenților cari au trimis soluții până la 1 Martie nu s'a putut face — va urma în No. 8).

EXERCIȚII PROPUSE

Clasa IV-a. *Exerc. 61.* Să se arate că

$$(a+b+c)(b+c-2a)+3(a^2-bc)=(a+b+c)(a+c-2b)$$

$$+3(b^2-ac)=(a+b+c)(a+b-2c)+3(c^2-ab).$$

N. B.

IV. 62. Să se rezolve ecuațiunea

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}=\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x-3}.$$

C. I. B.

BIBLIOTECA CENTRALĂ ACADEMIA ... SIBIIU

IV. 63. Să se rezolve ecuațiunea

$$(x+a)\,(x+a+b)+(x+b)\,(x+b+c)+(x+c)\,(x+c+a)$$
$$=(x-a)(x-a-b)+(x-b)(x-b-c)+(x-c)(x-c-a).$$

C. I. B.

IV. 64. Cât costă un pachet de ciocolată, dacă un elev, care avea 49 lei în buzunar, cumpără trei pachete și mai rămâne cu 7 lei ?

N. B.

IV. 65. La un concurs se hotărăşte împărțirea sumei de *1500* lei primilor patru clasificați, în aşa fel încât fiecare din primii trei să primească dublul sumei primite de cel următor reuşit la clasificație. Cât va primi fiecare premiat ?

N. B.

IV. 66. Un elev câştigând un premiu la un concurs de matematici, își păstrează pentru el *o jumătate,* dă *câte o cincime* celor două surori ale sale, iar restul de *100* lei îl dă fratelui său mai mic. Cât de mare a fost premiul ?

N. B.

IV. 67. Cu suma de *42 lei* un elev vrea să cumpere un număr egal de timbre postale a 1 leu şi de timbre de aviație a *0,50 lei.*

Câte timbre va cumpăra ?

N. B.

IV. 68. Intr'o clasă profesorul dictează elevilor un exercițiu numeric dându-le un număr divizibil cu 9. Un elev neatent, ducându-se acasă, pică cerneală peste o cifră a numărului dat din caiet, pe care n'o mai poate ceti. Rămâne astfel cu numărul *3457x6, x* fiind cifra pierdută. Poate regăsi elevul numărul dat de profesor ?

N. B.

Clasa V-a. *Exerc. 66.* Să se rezolve sistemul

$$ax + by = c$$
$$ay + bx = c.$$

N. B.

V. 67. Să se rezolve sistemul

$$\frac{x+4}{5} + \frac{y+3}{4} + \frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{5} + \frac{x-3}{4} + \frac{y-2}{3}$$
$$\frac{y+4}{5} + \frac{x+3}{4} + \frac{y+2}{3} = \frac{x-4}{5} + \frac{y-3}{4} + \frac{x-2}{3}.$$

N. B.

V. 68. Să se rezolve ecuaţiunea

$$\frac{x-1}{x^2-5x+6} + \frac{x-2}{x^2-4x+3} + \frac{x-3}{x^2-3x+2} = 0.$$

C. I. B.

V. 69. Două cercuri tangente exterioare C şi C′, cu centrele în O şi O′, au razele respective de *6cm.* şi *4cm.* Porţiunea tangentei dusă din O′ la cercul C, cuprinsă între O′ şi punctul de tangenţă, e împărţită de C′ în două părţi egale.

C. I. B.

V. 70. Două cercuri tangente exterioare C şi C′, cu centrele în O şi O′, au razele respectiv de *8cm.* şi *2cm.* Tangenta dusă din O′ la C, atinge în T cercul C şi tae în A, B cercul C′.

Dacă $\overline{TA} < \overline{TB}$, triunghiul BOT este isoscel.

C. I. B.

VI. 71. Se dă dreapta Δ care trece prin vârful O al unghiului drept xOy. Să se demonstreze că simetricile lui Δ faţă de laturile unghiului se suprapun, şi reciproc, dacă simetricile dreptei Δ, ce trece prin O, faţă de Ox şi Oy se suprapun, atunci unghiul xOy este drept.

G. B.

V. 72. Se dă triunghiul ABC şi se cere ca printr'un punct P al laturei BC să se ducă o dreaptă care să tae pe AB şi AC în M şi N astfel încât patrulaterul CNBM să fie inscriptibil.

G. B.

V. 73. In triunghiul ABC perpendiculara D ridicată pe mijlocul laturei BC întâlneşte latura AB în M, iar latura AC în N.

1°. Să se găsească două puncte P şi Q pe D, astfel ca patrulaterele ABPN şi ACQM să fie inscriptibile.

2°. Ce legătură există între punctele P şi Q şi ce raport au ele cu triunghiul ABC?

N. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 71.* Să se rezolve ecuaţiunea

$$4\cos^2 x = \sqrt{3}\sin x + \cos x + 2.$$

N. B.

VI. 72. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$E \equiv \sqrt[3]{\frac{\operatorname{tg} 47^0 30' - \operatorname{cotg} 37^0 20'}{\cos^2 27^0 15' \ (1 + \cos 17^0 5')}}.$$

N. B.

VI. 73. Să se calculeze valoarea expresiei:

$$E \equiv 2 \sin 17^0 36' 40'' - \sin 35^0 13' 20''.$$

N. B.

VI. 74. Dacă ecuaţiunea

$$x^2 + px + q = 0$$

admite rădăcinile $\sin\alpha$ şi $\operatorname{tg}\beta$, ce relaţii trebue să existe între coeficienţii p, q, p', q', pentru ca ecuaţia

$$x^2 + p'x + q' = 0$$

să admită rădăcinile $\cos\alpha$ şi $\operatorname{cotg}\beta$.

N. B.

VI. 75. Se consideră ecuaţiile

$$x^2 + px + q = 0 \quad , \quad y^2 + p'y + q' = 0$$

având rădăcinile :

$$x_1 = \text{tg}\alpha_1 \ , \ \alpha_2 = \text{tg}\alpha_2 \ ; \ y_1 = \text{tg}\beta_1 \ , \ y_2 = \text{tg}\beta_2.$$

Să se scrie ecuaţiunea în z având rădăcinile

$$z_1 = \text{tg}\,(\alpha_1 + \beta_1) \quad , \quad z_2 = \text{tg}\,(\alpha_2 + \beta_2).$$

N. B.

VI. 76. Fiind dat polinomul

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

să se determine condiţiile pentru ca

$$P(\text{tg}\alpha) = P(\text{cotg}\alpha).$$

C. I. B.

VI. 77. Să se calculeze cu ajutorul logaritmilor :

$$E = \frac{\text{tg}20^0 - \text{tg}50^0}{\text{tg}40^0 - \text{tg}70^0}.$$

C. I. B.

VI. 78. Să se demonstreze egalitatea

$$\frac{\text{cotg}20^0 - \text{cotg}30^0}{\text{cotg}30^0 - \text{cotg}40^0} = 2\cos 20^0.$$

C. I. B.

Clasa VII-a. *Exerc. 55.* Să se rezolve sistemul

$$(d - a)\,x + (d - b)\,y + (d - c)\,z = a\,(b - c)$$

$$(d - b)\,x + (d - c)\,y + (d - a)\,z = b\,(c - a)$$

$$(d - b)\,x + (d - c)\,y + (d - b)\,z = c\,(a - b).$$

N. B.

VII. 56. Se consideră funcțiunile

$$f(xy) = ax\left(1 + \frac{b}{x^2 + y^2}\right) \; ; \; g(x, y) = ay\left(1 - \frac{b}{x^2 + y^2}\right).$$

Să se verifice relația

$$f'_x g'_x + f'_y g'_y = 0.$$

N. B.

VII. 57. Se consideră funcțiunile

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2 \; ; \; \varphi(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

Să se verifice relațiile:

$$f'_x(x, y) = \varphi'_y(x, y) \; ; \; f'_y(x, y) + \varphi'_x(x, y) = 0$$

$$x\varphi'_y - y\varphi'_x = 3f(x, y) \; ; \; xf'_x - yf'_y = 3\varphi(x, y).$$

N. B.

VII. 58. Să se rezolve sistemul

$$(d - a)x + (d - b)y + (a - b)z = 0$$
$$(d - b)x + (d - c)y + (b - c)z = 0$$
$$(d - c)x + (d - a)y + (c - a)z = 0.$$

N. B.

VII. 59. Dacă y' este derivata funcțiunii:

$$y = \frac{\operatorname{tg} x^3 - \operatorname{cotg} x^3}{3x^2}$$

să se arate că există relația

$$y' + 6xy = 1.$$

C. I. B.

Revista „Gazeta Matematică“ apare lunar în 48 de pagini. O recomandăm elevilor din clasele VI și VII cu bogată activitate la „Supliment“. Abonamentul de lei 200 anual se trimite D-lui Lt. C-dor. Gr. Zapan, Casa Gazeta Matematică „Calea Griviței 158 — București II“.

Soluțiile exercițiilor propuse se vor redacta conform instrucțiunilor publicate în No. 1, pag. 8 și se primesc timp de 3 luni dela data propunerii lor.

Drepturile de reproducere sunt rezervate Societății „Gazeta Matematică“.

№ 8 –

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL I. No. 8 — 1 MAI 1935

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii, abonamente şi orice corespondenţă pe adresa:
Lt.-Comandor GR. ZAPAN

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa IV-a. *Exerc. 29. Se notează* AD *şi* BC *respectiv baza mică şi baza mare ale unui trapez,* E *şi* F *respectiv mijloacele laturilor neparalele* AB *şi* CD.

Se ia punctul G *pe baza mică astfel ca* $\overline{DG} = \frac{\overline{AD}}{4}$ *şi* H *pe baza mare astfel ca* $\overline{BH} = \frac{\overline{BC}}{4}$.

Să se arate că:

aria AEFD = aria ABHG.

C. I. B.

B, *b*, I fiind baza mare, baza mică şi înălţimea trapezului dat,

$$\text{aria AEFD} = \frac{1}{2}\left[\frac{B+b}{2}+b\right]\frac{I}{2} = \frac{(B+3b)\,I}{8} = \frac{\left(\frac{B}{4}+\frac{3b}{4}\right)I}{2}$$

$$= \text{aria ABHG}.$$

Clasa VI-a. *Exerc. 24. Prin vârful* A *al triunghiului* ABC *se duce o dreaptă oarecare* D. *Se proiectează punctele* B *şi* C *respectiv în* B′ *şi* C′ *pe* D. *Paralela dusă prin* B′ *laturei* BC *întâlneşte pe* AC *în* B_1, *iar paralela dusă prin* C′ *laturei* BC *întâlneşte latura* AB *în* C_1.

Să se arate că dreapta B_1C_1 *este perpendiculară pe direcţiunea dreptei* D. N. B.

Fie E şi F punctele în care latura AB este întâlnită respectiv de dreptele CC' şi B_1B'. Triunghiurile ABC, AFB_1 au toate laturile paralele. Ele sunt asemenea şi două linii omoloage ale lor sunt paralele. Dreptele CC' şi B_1C_1 sunt paralele dacă sunt drepte omoloage în cele două triunghiuri, deoarece trec prin vârfurile corespunzătoare C şi B_1. Trebue dovedit că:

$$\frac{EA}{EB} = \frac{C_1A}{C_1F}.$$

Această relaţie rezultă din relaţiile:

$$\frac{EA}{EB} = \frac{C'A}{C'B'}, \quad \frac{C_1A}{C_1F} = \frac{C'A}{C'B'}.$$

VI. 40. Să se calculeze suma:

$$\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^n} + \frac{1}{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{n-1}} + \frac{1}{(a-b)^2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{n-2}} + \ldots + \frac{1}{(a-b)^n}.$$

C. I. B.

Termenii sumei sunt în progresiune geometrică — de raţie

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

Notând S suma,

$$S = \frac{\dfrac{1}{(a-b)^n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \dfrac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^n}\right)}{\dfrac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - 1}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^n} \cdot \frac{1-\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{n+1}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{n+1}}}{\dfrac{1-\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^n} \cdot \frac{1-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{n+1}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^n(1-\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{1-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^{n+1}}{(a-b)^n(1-\sqrt{a}+\sqrt{b})}$$

Clasa VII-a. *Exerc. 12. Să se verifice egalitatea:*

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}+\arcsin\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt[4]{6^3}}{2\sqrt{5}}=\frac{\pi}{3}.$$

C. I. B.

Se notează $x=\arcsin\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$$\sin x=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \qquad \cos x=\sqrt{\frac{2\sqrt{6}}{5}}.$$

Cu aceste notații egalitatea se transformă succesiv

$$\frac{\pi}{3}-x=\arcsin\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt[4]{6^3}}{2\sqrt{5}}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt[4]{6^3}}{2\sqrt{5}}.$$

Desvoltând sinusul şi înlocuind:

$$\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\cos\frac{\pi}{3}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{2\sqrt{6}}{5}}-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt[4]{6^3}}{2\sqrt{5}}.$$

VII. 29. Să se demonstreze că dacă un patrat perfect este de forma $25m+9$ *, patratul precedent sau următor este de forma* $25m-9$.

GH. B.

Dacă

$$a^2=25m+9$$

trebuie să avem

(1) $a=25n+3$ sau (2) $a=25n-3$

şi reciproc.

Din (1) se scoate:

$$(a+1)^2 = (25n+4)^2 = \text{Mult. } 25 + 16$$
$$= \text{Mult. } 25 + 16 + 9 - 9 = 25m - 9$$
$$(a-1)^2 = (25n+2)^2 = \text{Mult. } 25 + 4 \neq 25m - 9$$

iar din (2) se scoate

$$(a+1)^2 = (25n-2)^2 = \text{Mult. } 25 + 4 \neq 25m - 9$$
$$(a-1)^2 = (25n-4)^2 = \text{Mult. } 25 + 16 = 25m - 9.$$

Deci când a este de forma (1) atunci $(a-1)^2$ este de forma $25m-9$ iar când a este de forma (2) atunci $(a+1)^2$ este de forma $25m-9$.

VII. 37. Să se arate că:

$$2[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2-(a+b)(b+c)-(a+b)(c+d)$$
$$-(b+c)(c+d)]^2 = \tfrac{1}{2}[(b-d)^2+(c+d-a-b)^2+(a-c^2]^2$$
$$= (b-d)^4+(c+d-a-b)^4+(a-c)^4.$$

I. L.

Dacă:

$$P = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta$$

atunci avem:

$$2P = (\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2$$
$$2P^2 = (\beta-\gamma)^4+(\gamma-\alpha)^4+(\alpha-\beta)^4$$

(vezi „*Théorie des Nombres*“ par E. LUCAS, 128).

Punând apoi:

$$\alpha = a+b \quad ; \quad \beta = b+c \quad ; \quad \gamma = c+d.$$

Obţinem identităţile cerute, adică:

$$2(P)^2 = \tfrac{1}{2}(2P)^2 = 2P^2.$$

I. L.

VII. 38. Să se arate că:

$$(a-2c-d)^3-(a+d)^3+(d-2b-a)^3$$
$$+(a+2b+2c+d)^3=24\,(a+b)\,(b+c)\,(c+d).$$

I. L.

Se ştie că avem:

$$(\alpha-\beta-\gamma)^3+(\beta-\gamma-\alpha)^3+(\gamma-\alpha-\beta)^3$$
$$+(\alpha+\beta+\gamma)^3=24\,\alpha\beta\gamma$$

(vezi *„Théorie des Nombres"* par E. LUCAS, 122).

Dacă punem:

$$\alpha=a+b\ ;\ \beta=b+c\ \text{şi}\ \gamma=c+d$$

obţinem tocmai identitatea cerută.

I. L.

Până la 1 Aprilie s'au primit soluţii bune pentru problemele propuse în numerele 4, 5, 6 dela: [1]).

Şcoala Centrală de fete „Maria Brâncoveanu" Bucureşti.

Clasa IV-a: ALEXE C. LUCIA (IV: 51, 55), BUCESCU C. IVONNE (IV: 46, 48, 51, 55, 56, 57), DUMITRESCU JEANA (IV: 55, 56, 57), IONESCU FLORICA (IV: 51, 56, 57), IONESCU MARIA NINA (IV: 46, 48, 51, 56, 57), LUCACI ST. MARG. ELISABETA (IV: 45, 48, 51, 58), NICOLAU A. ELENA (IV: 51, 55, 57), TRIFU B. MELANIA (IV; 46, 48, 51, 58), VASILESCU A. PAULA (IV: 51, 55, 57), VETTU I. PAULINA (IV: 51, 55, 58).

Clasa V-a: LUPU N. MARIA (V: 34*, 36*, 50*. VI: 51*), NASTA AMELIA GABRIELA (V: 33, 34, 35, 36*, 37, 38*, 39*, 40*, 41*, 42*, 43, 44, 45, 46*, 47*, 50*, 56*, 57*, 58*, 59*, 62*, 63*. VI: 52*), PANDELE I. ALEXANDRINA (V: 33, 37, 38, 41*, 47, 50*, 56, 57. VI: 52*), POPP V. SIMONA (V: 33, 37, 38, 41*, 50, 56, 57. VI: 52*), ROMAŞCAN G. GEORGETA (V: 25, 33*, 34*, 35*, 36*, 44*, 51*. VI: 51*), STĂNESCU N. V. (V: 51*. VI: 51*), TROFIN AURORA V: 34*, 35*, 36*, 37*).

---

1) Semnul * însoţeşte numărul unui exerciţiu rezolvat foarte bine. Vor fi trecute şi exerciţiile din Nr. 3 venite până la 1 Martie şi nepublicate in No. 7.

Clasa VI-a: ARBORE RODICA (VI: 50, 55*, 62, 64), CONEA D. MARIA (VI: 26, 27*, 44*, 45*, 46*, 55*, 62, 63, 64), IONESCU C. ORTANSA (VI: 44*, 45*, 46*, 50, 51*, 52*, 55*, 61*, 64), SOTIR G. ELENA (VI: 48, 49, 50, 52*, 53, 54*, 55*, 62), ZONFALY I. MARIA (VI: 36, 50, 52*, 55*).

Liceul de fete „Regina Maria" Bucureşti.

Clasa III-a: CLEJAN ALICE (V: 62*, 63*, 64*), COHN LYDIA (V: 62*, 63*, 64), DAN P. AURORA (IV: 21*, 22*, 31*, 35).

Clasa VI-a: TĂNĂSESCU VENERA (VI: 47*, 48*, 49*, 51*, 55*, 61*, 62*, 63*, 64*).

Liceul de fete „Domniţa Ileana" Bucureşti.

Clasa IV-a: BĂDULESCU V. VIORICA (IV: 51, 52, 54, 58), ERBLICH D. ELSA (IV: 29, 30, 36, 37, 44, 45, 46, 48).

Clasa V-a: DIMITRIU ANGELA (V: 56*. VI: 52*).

Clasa VI-a: NICOLESCU PROFIRA (VI: 52*, 55), PUTINEANU ECATERINA (VI: 44*, 45*, 46*, 52*, 53*, 54*, ŞTEFĂNESCU AURORA (VI: 41, 44*, 52*, 53, 54*, 55).

Externatul Ortodox „Zoe Râmniceanu" Bucureşti.

Clasa VI-a: LAZAROVICI ROZICA (VI: 62, 63, 64, 65), ROCIU I. MARIA (VI: 61*, 62, 63*, 64*, 65*, 68).

Institutul Ortodox Internat Bucureşti.

Clasa IV-a: MĂRGĂRITESCU MARIA (IV: 51, 52), OTETELIŞANU E. RUXANDRA (IV: 51, 52, 59, 60).

Clasa V-a: MOISE CORNELIA (V: 37, 38).

Institutul de fete „Moteanu" Bucureşti.

Clasa III-a: MUNROE M. MANUELA (IV: 34, 35, 36).

Clasa V-a: MALAXA N. IRINA (V: 28*, 34*, 35*, 36*, 51*. VI: 44*, 45*, 46*).

Institutul de fete „Bolintineanu" Bucureşti.

Clasa IV-a: DINULESCU I. SOPHIA (IV: 30, 31, 35), OPREA IOANA (IV: 31, 32, 34).

Clasa V-a: DUMITRESCU MARGARETA (V: 56. VI: 52).

Liceul de fete „Aurel Vlaicu" Bucureşti.

Clasa III-a: BUZESCU C. CLAUDIA (IV: 64*, 65*, 66*, 67, 68*).

Liceul de fete „Avântul Cultural" Bucureşti.

Clasa V-a: BURICHOVICI CLARISSE (V : 56, 58, 59). PENCHAS ANELLY (V : 56, 58, 59).

Liceul de fete „Ecaterina Urziceanu" Craiova.

Clasa VI-a: VLĂDESCU IVONNE (VI : 52*, 53*, 55*, 57*, 62, 63, 64, 68).

Liceul de fete „Dr. Angelescu" Buzău.

Clasa V-a: STĂNESCU SUZANA (V : 46*).
Clasa VII-a: IONESCU G. FILOFTEIA (VII : 43).

Liceul de fete „Elina Matei Basarab" Râmnicul Sărat.

Clasa IV-a: ALEXANDRESCU POLIXENIA (IV : 31, 32, 44, 46, 48).

Liceul de fete Chişinău.

Clasa IV-a: LACTIONOV GALLINA (IV : 51, 52, 54, 55, 58).

Seminarul Pedagogic Universitar Bucureşti.

Clasa IV-a: BODNĂRESCU M. H. (IV : 29, 37, 38, 49, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59. V : 51*, 56*, 57*, 59*, 61*, 62, 64. VI : 51*), SLOVENZ T., P. (IV : 51, 52, 53, 54, 58).

Liceul „Gh. Lazăr" Bucureşti.

Clasa IV-a: ANGHELESCU V. E. (IV : 29, 30, 31, 32*, 33, 34, 35, 36, 41, 44, 45, 46, 47, 48, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58. V : 50*).
Clasa V-a: DECUSARĂ E. N. (V : 37, 38, 56, 57. VI : 44*, 45*, 46), DROUHET E. (V : 56*, 57*, 58*, 59*, 60*, 61*, 62*, 63*), IONESCU GR. (V : ,56), MUNROE M. M. (V : 41*, 42*, 43, 46*, 47*, 49, 50*, 51. VI : 52*, 53*, 54*).
Clasa VI-a: BALLAN M. (VI : 50, 51*, 52*, 53*, 54*, 55*. VII : 37*, ,44, 46), BĂZDOACĂ C. P. (VI : 37*, 38*, 39*, 55*, 61*, 62, 63), BEGU I. I. (VI : 57*, 62*, 63*). BREZEANU-TEIŞANI D. O. (VI : 55*), COGAN H. I. (VI : 41*, 51*, 52*, 53*), DRĂGHICESCU F. M. (VI : 40*, 41*, 42*, 50, 56, 61*, 62*, 63*. 64*, 65*. VII : 37*, 46), FILIPESCU I. D. (VI : 38*, 44*, GOLDENBERG A. H. (VI : 35, 36, 37, 38*, 40*, 41*, 51*, 52*, 53*, 54*, 55*, 60*, 61. VII : 31, 32*, 44), HAIER E. A. (VI : 35, 36, 44*, 45*, 46*), MIHAIL G. G. (VI : 35, 36, 38*, 39*, 40*, 41*, 44*, 45*, 46*), NICULESCU V. A. (VI : 51*, 55*, 57*, 62*), RĂ-TESCU C. (VI : 40*, 41*), ROTSTEIN C. (VI : 52*, 53*, VII : 44), ICHRAMM B. (VI : 37*, 38*, 39*, 40*, 41*, 50, 51*, 53*, 54*, 55*).
Clasa VII-a: BĂLĂŞESCU I. M. (VII : 44, 46, 47*, 53, 54*), BERONIADE G. M. (VII : 31*, 32*, 34, 36, 47*), CHIRICUŢĂ I. (VII : 44, 47*). GEORGESCU V. (VII : 31*, 32*, 44, 46*), GREFIENS EV. (VII : 31*, 32*, 36), PETRESCU

V. (VII: 31*, 32*, 34*, 36*), RAEZ S. (VII: 31*, 32*, 33*, 36*), SEGAL S. E. (VII: 31, 32, 34, 36).

Liceul „Matei Basarab" București.

Clasa V-a: CHIRIACESCU N. (V: 33, 37, 38, 46*), HASAN M. (V: 46, 48, 49, 50*), HEROVICI TH. (V: 41*), NICULESCU I. D. (V: 51, 56*, 57*, 58, 59, 60, 61, 62*, 63*), PRECIADO T. (V: 26, 34, 35, 36, 39, 40*, 50*, 62*, 63*, 64), ȘAECHIN O. A. (V: 50, 53, 54*, 55*, 61, 63. 64. VI: 47. VII: 46*), SIPPMAYR I. J. (V: 41*, 42, 44).

Colegiul Național „Sf Sava" București

Clasa IV-a: CIURESCU I. R. (IV: 51, 58), ENESCU G. M. (IV: 46, 48, 51, 55, 56, 57, 58), PÂRVULESCU O. (IV: 46, 51), VINTILESCU P. P. (IV: 54, 55, 56, 57, 58).

Clasa V-a: STROESCU M. (V: 33, 47, 56*, 57*, 66*. VI: 52*. VII: 38).

Liceul „Mihai Viteazul" București.

Clasa IV-a: BELDIMAN V. A. (IV: 84, 51, 52, 54, 58), CÂRNARU D. O. (IV: 31, 32, 33, 34. V: 32, 37, 38), CONSTANTINESCU V. C. (IV: 32, 33, 34, 41, 45, 46, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58), FIEDMAN L. S. (IV: 34, 48, 51), FRUGOLI G. R. (IV: 46, 48, 51), HOREZEANU S. M. (IV: 46, 48, 51, 52, 58), LASCAROV-MOLDOVANU A. M. (IV: 46, 48, 51, 58), POPESCU C. V. (26, 31, 33), SERDICI V. G. (IV: 31, 32, 33, 34, 36, 51, 58),

Clasa V-a: BALLY N. (V: 56, VI: 52*. VII: 44), GROSS I. E. (V: 46, 47, 49*, 50, 58, 59, VI: 43, 44, 52*, 53*, 54*. VII: 44), GHIULAMILA C. (V: 33, 37, 38), IORDAN M. C. (V: 24, 26, 29, 31, 32, 33, 37, 38, 39), LASCAR M. (V: 46, 47), RANCK I. (V: 37*, 38*, 39, 47*, 56*, 57*), STĂNESCU T. (V: 33, 35, 36, 38, 41*).

Clasa VI-a: BEIU- PALADI G. E. (VI: 44*, 45*, 46*), SAL D. I. (VI: 35, 37*, 39*, 44*, 45*, 46*, 51, 52*, 54*).

Liceul „Gh. Șincai" București.

Clasa IV-a: CETĂȚEANU G. S. (IV: 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 41, 44, 45, 46, 47, 48, 51, 52, 58. V: 34*, 35*, 36*, 37, 38, 41*, 44), DUMITRESCU V. M. (IV: 44, 45, 48, 51, 58), ROBESCU G. G. (IV: 21, 31, 32*, 33, 34, 41).

Clasa V-a: CETĂȚEANU N. (V: 33*, 37, 38, 39*, 41*), MATEI I. (V: 33*, 34, 35, 36, 37, 38, 39*).

Clasa VI-a: CÂRLĂNESCU G. (VI: 35. 36, 44*, 45*, 46*), ENE F. C. (VI: 51*, 52*, 53*, 54*. VII: 37, 38), MIRESCU G. A. (VI: 35, 36, 44*, 45, 46, 49, 51, 52*, 53*, 54*), MOISE S. C. (VI: 44, 45, 46, 52*), PERIEȚEANU D. M. (VI: 40*, 41*, 42*, 51, 66*).

Clasa VII-a: ENE F. I. (VII: 43, 44, 45*, 46*, 47*).

Liceul „Mihail Eminescu“ Bucureşti.

Clasa V-a: BĂDULESCU V. V. (V: 50, 61, 62).

Clasa VI-a: POMPONIU L. L. (VI: 26*. 27*, 28*, 29*, 30*, 31*, 32*, 33*, 34*, 35*, 36*, 37*, 39*, 40*, 41*, 42*, 44*, 45*, 46*, 52*, 53*, 54*, 56, 57*, 60. VII: 44*).

Liceul „Cantemir Vodă“ Bucureşti.

Clasa V-a: PÂRCĂLĂBESCU A. (V: 56, 57).

Clasa VI-a: CEORGESCU N. N. (VI: 27, 35, 36, 44, 45, 46, 47, 49, 51, 52*, 52, 56).

Liceul „Spiru Haret“ Bucureşti.

Clasa V-a: CHIRICEANU M. A. (V: 46, 47, 48, 49, 50*, 51), STĂNCULESCU I. (V: 57, 58, 59, 62*, 63*).

Clasa VI-a: ANGELESCU I. C. (VI: 50, 51, 52*, 53*, 54*, 55, 57*. VII: 44), BODNĂRESCU B. (VI: 38, 44*, 45. 46*, 49, 50, 51*, 52*, 53*, 54*, 55, 56. VII: 44), BOISNARD M. L. (VI: 61, 62*, 63, 64*, 65*, 66, 67, 68).

Liceul „Aurel Vlaicu“ Bucureşti.

Clvsa IV-a: FULGA L. T. (IV: 31, 32*, 33, 34, 44, 45, 46, 48, 54), HORVAT S. (IV: 51, 52, 53, 54, 58), MARIOARA G. SAVA (IV: 44, 45, 46, 48, 51, 52).

Clasa VI-a: BUZESCU ?. V. A. (VI: 61*, 62*, 63*, 64*, 65*, 67, 69, 70).

Liceul „Sf. Iosif“ Bucureşti.

Clasa IV-a: GHELLER M. (IV: 34), IONESCU T. T. (IV: 31, 33, 34, 35).

Clasa VI-a: ŞARAGA F. K. (VI: 52*, 55, 60).

Liceul „Sf. Andrei“ Bucureşti.

Clasa VI-a: GLASBERG A. M. (VI: 31), GROSSU R. (VI: 51*, 52. 55*).

Liceul „Sf. Gheorghe“ Bucureşti.

Clasa VII-a: EFTIMIU V. T. (VII: 31, 32*).

Elevi Particulari Bucureşti.

Clasa IV-a: MIHĂESCU-NIGRIM V. (IV: 32*, 34, 46, 48, 51. VI: 52*).

Liceul „B. P. Haşdeu“ Buzău.

Clasa IV-a: NICOLAU L. M. (IV: 30*, 32*, 41, 44, 45, 46, 47, 48).

Clasa V-a: NICOLAU L. L. (V: 46, 50*).

Liceul „Tasse Dumitescu" Mizil.

Clasa IV-a: BUZNEA C. R. (IV: 21, 24, 25), GEAMBAŞU V. T. (IV: 51, 57), MAZILU I. I. (IV: 57), TEODORESCU D. C. (IV: 44, 45, 46, 48, 51).
Clasa V-a: FIANU I. G. (V: 29, 30, 34, 35).

Liceul „Regele Ferdinand I" Râmnicul Sărat.

Clasa IV-a: CALCAN V. (IV: 32, 33, 34), COMĂNESCU I. (IV: 32*, 33, 34, 44, 45, 46, 48, 51, 53, 56, 57), FOARFECĂ I. M. (IV: 32, 33, 34, 34, 44 45, 46, 48, 51), GHEORGHIU P. P. (IV: 32, 33, 34, 35, 44, 45, 46, 47, 48, 51, 58), OROVEANU T. (IV: 32, 33, 34, 44, 46, 48, 51, 58).

Licenl „Unirea" Focşani.

Clasa V-a: MADOLU T. A. (V: 33*, 35, 36, 37*, 38, 39*, 40).
Clasa VII-a: FOCŞENEANU C. (II: 49*), MARTAC R. (VII: 30*, 31, 32, 34, 36, 38, 41, 42, 43, 44, 45*, 46, 47*).

Liceul „N. Bălcescu" Brăila.

Clasa VII-a: GOLDENBERG M. E. (VI: 48, 53).

Şcoala Comercială Superioară Brăila.

Clasa I-a B: DIMOFTACHE I. I. (IV: 44, 45, 46, 48, 51, 52, 55, 56, 57), GEORGKAKIS N. E. (IV: 44, 45, 46, 48), VRÂNCEANU M. N. (IV: 41, 44, 45 46, 47, 48, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58).

Liceul „Durostor" Silistra.

Clasa VII-a: TOPSACALIAN A. (VII: 48, 52, 54*).

Liceul „Mircea cel Bătrân" Constanţa.

Clasa IV-a: GHEORGHIU G, V. (IV: 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58), MĂSCĂ I. A. (IV: 24, 26*, 33, 34, 51, 52, 53, 54, 58), OPRESCU N. D. (IV: 51, 52, 53, 54, 57, 58), PREDA N. (IV: 51, 52, 53, 58), RĂDULESCU I. V. (IV: 24, 33, 34, 44, 46, 47, 51, 52, 53, 58), ŞTEFAN A. A. (IV: 45, 46, 47, 48, 51), STEŢCU G. W. (IV: 46, 51, 54).

Liceul „D. A. Sturdza" Tecuci.

Clasa VII-a: ANDRONIC ST. M. (VII: 38, 41, 42, 43, 44, 46*).

Liceul „Cuza Vodă" Huşi.

Clasa VI-a: BUTNĂREANU P. V. (VI: 44, 45, 46, 52*, 53*, 54*, 55, 57*), CHIRIAC I. S. (VI: 27).
(Completarea în Nr. 9).

EXERCIȚII PROPUSE

Clasa IV-a. *Exerc. 69.* Până la 1 Aprilie, un elev a trimis soluții la 5/6 din numărul exercițiilor publicate în «Suplimentul Gazetei Matematice» pentru clasa lui; un coleg al său la 4/5.

Primului elev nu i s'au publicat, fiind greșite, trei exerciții, celuilalt cinci exerciții.

In acest fel, primul îl întrece pe al doilea în privința exercițiilor publicate cu 1/4 din numărul exercițiilor propuse. Câte exerciții a trimes fiecare?

C. I. B.

IV. 70. Pe primele două trimestre un elev leneș a obținut medii sub *cinci* la un sfert din numărul materiilor clasei sale și la încă o materie:

Dacă până la sfârșitul anului s'ar îndrepta la două materii, ar avea media peste cinci la 5/6 din numărul materiilor.

Care ar fi situația elevului?

C. I. B.

IV. 71. Se dă o dreaptă D și un punct I și fie $\overline{IA}$ cea mai scurtă distanță dela I la dreapta D. Fie încă M mijlocul lui $\overline{IA}$; iar N și P mijloacele segmentelor $\overline{MI}$ și $\overline{MA}$.

Ducem segmentul $\overline{MB}$ paralel cu dreapta D și egal cu jumătatea lui $\overline{MA}$. Dreapta IB taie pe D în punctul E. Apoi prin punctul N ducem segmentul $\overline{NB'}$ paralel cu D și egal cu jumătatea lui $\overline{NA}$ și prin punctul P un segment $\overline{PB''}$ paralel cu D și egal cu jumătatea lui $\overline{PA}$.

Dreptele IB' și IB'' taie dreapta D în E' și E'' respectiv. Știind că distanța E'E'' este de 16 cm. să se găsească distanța cea mai scurtă a punctului I la dreapta D.

2°. Dacă S este punctul unde ME' taie pe IE, să calculeze lungimea IS.

3°. Să se determine raportul dintre ariile laterale deoparte și între volumele (de alta) conurilor înăscute din rotirea triunghiurilor dreptunghiuri IAE și MAE'.

O. N. Ț.

IV. 72. Intr'un cilindru circular drept este o sferă tangentă suprafeţii laterale şi bazelor cilindrului (înscrisă în cilindru).

Dacă A şi B sunt centrele cercurilor de bază ale cilindrului O centrul sferei şi MN cercul după care sfera este tangentă suprafeţii cilindrului, ducând prin I mijlocul lui $\overline{OA}$ un plan paralel cu MN se determină în sferă cercul PS şi în cilindru cercul P'S'.

1°. Să se determine raportul dintre aria zonei sferice MNPS şi aria laterală a cilindrului MNP'S'.

2°. Să se găsească alte proprietăţi ale figurii.

O. N. Ţ.

Clasa V-a. *Exerc. 74.* Paralela dusă prin punctul M situat pe latura BC a triunghiului ABC, întâlneşte laturile AB şi AC respectiv în R şi S. Să se arate că:

$$\frac{\overline{SM}}{\overline{AB}} + \frac{\overline{RM}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{RS}}{\overline{RA}}$$

G. D. S.

V. 75. Să se calculeze rădăcinile ecuaţiei:

$$m\,(m-2)\,x^2 + 4\,(m^2-n)\,x + 4\,n\,(2\,m-n) = 0.$$

G. D. S.

V. 76. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$b\,(c-k)^3\,x\,(x-b) + bc\,(b-c)\,(a-k)\,(x-k)^2$$
$$+ c\,(b-k)^3\,x\,(c-x) + (b-c)\,(c-a)\,(x-b)\,(bcx-k^3) = 0,$$

N. B.

V. 77. Ce relaţii trebue să existe între coeficienţii ecuaţiilor:

$$x^2 + p\,x + q = 0 \;;\quad x^2 + p'\,x + q' = 0$$

pentru ca suma a două din rădăcinile lor să fie egală cu suma celorlalte două.

N. B.

V. 78. Fie d_1, d_2, d_3, d_4 distanţele dela un punct M la patru drepte Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 din acelaşi plan. Să se determine acel punct, când se cunosc cele două lungimi

$$l = d_1 + d_2, \; n = d_3 + d_4.$$

N. B.

V. 79. Să se rezolve inecuaţiunea:

$$1 + \frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4}.$$

C. I. B.

V. 80. Să se rezolve sistemul:

$$ax + by - 1 = 0$$

$$a^2 x^2 - 2ax - b^2 y^2 + 3 = 0.$$

C. I. B.

V. 81. Un triunghiu ABC are $\overline{AB} = 2$, unghiul A de 75^0 şi unghiul B. de 60^0.

Să se calculeze lungimea înălţimilor $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$.

C. I. B.

V. 82. Să se determine a pentru care ecuaţiunea:

$$ax^2 - (a+1)\,x + (a+2) = 0$$

are:

1. rădăcini reale;

2. o rădăcină egală cu a.

C. I. B.

V. 83. Fie BB' înălţimea triunghiului ABC dreptunghic în B şi P un punct mobil pe cercul BB'A.

Paralela din B la AP taie acest cerc în P', iar dreapta BP taie cercul BB'C în Q. Acest cerc este întâlnit de BP' în Q'. Se cere locul geometric al centrelor de greutate al triunghiurilor QPP' şi QPQ' când P se mişcă pe cercul AB'A.

GH. B.

Clasa VI-a. *Exerc. 79.* Să se construiască o sferă de rază dată, trecând printr'un punct dat şi tangentă la două plane date.

N. B.

VI. 80. Se consideră un dreptunghiu ABCD cu laturile :

$$\overline{AB} = \overline{CD} = a, \ \overline{AD} = \overline{BC} = b.$$

Se duce diagonala AC. O paralelă la latura BC întâlneşte dreptele AB, AC, CD respectiv în L, M, N.

Să se determine poziţia acestei paralele, astfel ca rotind dreptunghiul în jurul laturei CD, volumul născut prin rotirea triunghiului ALM să fie egal cu volumul născut prin rotirea triunghiului MNC, şi să se arate că această poziţie nu depinde de mărimea laturei *b*.

N. B.

VI. 81. Să se rezolve ecuaţiile :

a) $\sin 2x + \cos 2x = \sin x + \cos x - 1$;

b) $1 + \sin x + \cos 2x = \sin^2 x$.

G. D. S.

VI. 82. Intr'un triunghiu dreptunghiu — notaţiile fiind cele obişnuite, există relaţia :

$$\cos (B - C) = \frac{2bc}{a^2} .$$

C. I. B.

VI. 83. Dacă unghiurile unui triunghiu dreptunghiu sunt în progresiune aritmetică, există relaţia :

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

b, c fiind lungimile catetelor.

C. I. B.

VI. 84. Notațiile fiind cele obișnuite într'un triunghiu, să se verifice identitatea :

$$\frac{a^2 - 2bc\ \cos A}{b^2 - 2ac\ \cos B} = \frac{1 + \cos(B - C)\ \cos A}{1 + \cos(A - C)\ \cos B}.$$

C. I. B.

VI. 85. Să se facă următoarea expresiune :

$$E = 1 + \operatorname{tg} 35^0 + \operatorname{tg} 40^0$$

calculabilă prin logaritmi.

C. I. B.

Clasa VII-a. *Exerc. 60.* Să se calculeze adevărata valoare a expresiei :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{a \sin x} - ax - 1}{a \sin x}.$$

G. D. S.

VII. 61. Să se găsească valoarea expresiei :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-x}}{e^{\frac{1}{x}} - 1}.$$

G. D. S.

VII. 62. Fie :

$$f(x) = \frac{x}{\sin \pi x}.$$

Să se calculeze : $\lim f(x)$; $\lim f'(x)$; $\lim f''(x)$ când x tinde către 0.

G. D. S.

VII. 63. Să se calculeze suma seriei :

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+3)}.$$

G. D. S.

VII. 64. Se dau în epură punctele: A (4, 0, 0) ; B (2, 0, 4) ; C (3, 1, 4). Să se afle distanța punctului A la dreapta BC.

C. I. B.

VII. 65. Să se demonstreze că triunghiul ABC, pentru care în epură A (2, 1, 3) ; B (3, 2, 3) ; C (4, 2, 2), este isoscel.

C. I. B.

VII. 66. Se dau în epură punctele: A (2, 0, 3) , B (3, 1, 3) și C (4, 2, 0). Să se arate că punctele A , B și verticala trecând prin C sunt în același plan.

C. I. B.

VII. 67. Să se studieze variațiunea funcțiunii:

$$y = \sqrt{\frac{\operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + \sqrt{3}}}$$

și să reprezinte această variațiune.

O. N. Ț

Erată: 1°. La Ex. 55. VII se va scrie ultima ecuație:

$$(d - c)\,x + (d - a)\,y + (d - b)\,z = c\,(a - b).$$

2°. La Ex. 57. VII membrul I al ultimei relații este

$$yf'_x - x\,f'_y = 3\varphi\,(xy).$$

3°. La Ex. 59. VII se va adăuga membrului II al relației

$$\frac{3x\,(1 + 3x^4y^2) + y\,(1 + 6x^2) - (x + 3y)}{x}.$$

Revista „Gazeta Matematică“ apare lunar în 48 de pagini. O recomandăm elevilor din clasele VI și VII cu bogată activitate la „Supliment“. Abonamentul de lei 200 anual se trimite D-lui Lt. C-dor. Gr. Zapan, Casa Gazeta Matematică „Calea Griviței 158 — București II“.

Soluțiile exercițiilor propuse se vor redacta conform instrucțiunilor publicate în No. 1, pag. 8 și se primesc timp de 3 luni dela data propunerii lor.

Drepturile de reproducere sunt rezervate Societății „Gazeta Matematică“.

1934-35 —

Nr 9 —

BIBLIOTECA CENTRALA
„ASOCIAȚIUNII"
SIBIIU

GAZETA MATEMATICA

SUPLIMENT CU EXERCIŢII

ANUL I. No. 9 — 1 IUNIE 1935

ABONAMENTUL LEI 50 PE AN (9 numere)

Soluţii, abonamente şi orice corespondenţă pe adresa:
Lt.-Comandor GR. ZAPAN

Casa «Gazeta Matematică», Calea Griviţei 158. — Bucureşti 2

REDACŢIA SUPLIMENTULUI „GAZETEI MATEMATICE" A FOST COMPUSĂ ÎN ACEST AN DIN D-NII:

N. G. Botea (N. B.)
General Gh. Buicliu (G. B.)
Gh. Th. Gheorghiu (G. T. G.)
M. Ghermănescu (M. G.)
I. Ionescu (I. I.)
C. Ionescu-Bujor (C. I. B.)
Maior I. Linteş (I. L.)
Al. Roşu (A. A. R.)
Gh. D. Simionescu (G. D. S.)
Ovidiu N. Ţino (O. N. Ţ.)

Lt.-Cdor Gr. Zapan (Lt.-C. Gr. Z.).

EXERCIŢII REZOLVATE

Clasa V-a. *Exerc. 33. Să se arate că expresia:*

$$(x+1)(y+1)(x-y)+(x+1)(y-1)(x+y)$$
$$-(x-1)(y-1)(x-y)$$

se divide cu produsul $(x-1)(y+1)(x+y)$ *şi să se afle câtul.*

N. B.

Să notăm cu $P(x,y)$ expresia dată. Observăm că dacă înlocuim pe x cu 1, expresia se anulează. Ea se divide deci cu $x-1$. Deasemeni dacă înlocuim pe y cu -1 sau pe x cu $-y$ expresia se anulează. Ea se va divide şi cu factorii $y+1$ şi $x+y$.

Calculul este următorul:

$$P(1,y) = 2(y+1)(1-y) + 2(y-1)(1+y) \equiv 0$$

$$P(x,-1) = -2(x+1)(x-1) + 2(x-1)(x+1) \equiv 0$$

$$P(-y,y) = (-y+1)(y+1)(-2y) - (-y-1)(y-1)(-2y) \equiv 0,$$

$P(x,y)$ este un polinom de gradul 3 în x şi y, care se divide cu fiecare din factorii $(x-1)$, $(y+1)$, $(x+y)$. El se divide deci cu produsul lor, care e polinomul de gradul 3:

$$Q(x,y) \equiv (x-1)(y+1)(x+y)$$

P şi Q fiind de acelaş grad, câtul lor va fi o constantă λ:

$$P(x,y) = \lambda Q(x,y).$$

Găsim pe λ dând valori particulare lui x şi y. De exemplu, pentru $x=0$, $y=1$ vom avea $P(0,1) = -2$, $Q(0,1) = -2$.

Deci $\lambda = 1$.

V. 38. Să se verifice identitatea:

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-1}{b+1} - \frac{(a-b)(b-1)(a-1)}{(a+b)(b+1)(a+1)} = \frac{a-1}{a+1}.$$

N. B.

Aducând la acelaş numitor în cele două părţi ale egalităţii şi egalând numărătorii vom avea de demonstrat:

$$(a+1)(b+1)(a-b) + (a+1)(b-1)(a+b) - (a-1)(b-1)(a-b) = (a-1)(b+1)(a+b).$$

Dacă aci facem înlocuirile: $a=x$, $b=y$ obţinem exerciţiul V. 33.

V. 40. Dacă ab = cd, *avem egalitatea:*

$$\frac{a-1}{a+1} + \frac{b-1}{b+1} - \frac{c-1}{c+1} - \frac{d-1}{d+1} = \frac{(a-1)(b-1)(c-1)(d-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} \left[\frac{c+1}{c-1} + \frac{d+1}{d-1} - \frac{a+1}{a-1} - \frac{b+1}{b-1}\right].$$

N. B.

Folosim notațiile :

$$A=\frac{a-1}{a+1}\ ,\ B=\frac{b-1}{b+1}\ ,\ C=\frac{c-1}{c+1}\ ,\ D=\frac{d-1}{d+1}\ .$$

Egalitatea se scrie :

$$A+B-C-D=ABD+ABC-BCD-ACD$$

sau

$$(A+B)(1+CD)=(C+D)(1+AB)$$

$$\therefore\ \frac{A+B}{AB+1}=\frac{C+D}{CD+1}$$

și înlocuind pe A, B, C, D cu valorile lor ajungem la egalitatea :

$$\frac{2ab-2}{2ab+2}=\frac{2cd-2}{2cd-2}$$

adevărata când $ab=cd$.

V. 41. Două paralelograme AMBN , CMDN *au două vârfuri opuse comune. Să se arate că patrulaterul* ABCD *este paralelogram.*

N. B.

Fie L mijlocul diagonalei comune MN. L este deasemenea mijlocul diagonalelor AB și CD. Deci ABCD este paralelogram, diagonalele tăindu-se în părți egale.

V. 46. Să se arate, că :

$$\frac{ab(ab+a+b)-(a+b+1)}{a^2b^2-a^2-b^2+1}=\frac{a^2b^2-2ab+1}{ab(ab-a-b)+a+b-1}\ .$$

N. B.

Dând factori comuni, prima fracțiune se scrie :

$$\frac{(ab-1)(a+1)(b+1)}{(a^2-1)(b^2-1)}=\frac{ab-1}{(a-1)(b-1)}$$

iar cea de a doua :

$$\frac{(ab-1)^2}{(ab-1)(a-1)(b-1)}=\frac{ab-1}{(a-1)(b+1)}\ .$$

V. 47. Să se arate că expresiunea :

$$(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$$

se divide cu $x+y+z$ *şi să se afle câtul.*

N. B.

Inlocuind pe x cu $-(y+z)$ expresia devine :

$$(-z)(y+z)(-y)+(-y-z)yz=0.$$

Deci se divide cu

$$s=x+y+z.$$

Expresia se mai scrie pe rând :

$$E=(s-z)(s-x)(s-y)+xyz$$
$$=s^3-(x+y+z)s^2+(xy+yz+zx)s-xyz+xyz$$
$$=s^3-s^3+(xy+yz+zx)s=(xy+yz+zx)(x+y+z).$$

Câtul este $xy+yz+zx$.

V. 48. Să se rezolve ecuaţiunea :

$$ab(c-d)^3(x-b)+bc(a-d)^2(b-c)(x-d)+c(b-d)^3(c-a)x$$
$$+(a-b)(b-c)(c-a)(bcx-d^3)=0.$$

N. B.

$$x=a.$$

V. 49. Să se rezolve ecuaţiunea :

$$a(b-c)[(2a-b-c)x+bc-a^2]+b(c-a)[(2b-c-a)x+ca-b^2]$$
$$+c(a-b)[(2c-a-b)x+ab-c^2]=0.$$

N. B.

$$x=\frac{a+b+c}{3}.$$

V. 50. Să se rezolve sistemul:

$$ax + by = c \ , \ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{c} \ .$$

N. B.

$$x = \frac{a\,(c^2 - b^2)}{c\,(a^2 - b^2)} \quad ; \quad y = \frac{b\,(c^2 - a^2)}{c\,(b^2 - a^2)} \ .$$

V. 51. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x+y}{c} = \frac{y+z}{a} = \frac{z+x}{b}$$

$$ax + by - cz = \frac{1}{a+b-c} \ .$$

C. I. B.

Intr'un şir de rapoarte egale, raportul sumei numărătorilor şi sumei numitorilor este egal cu rapoartele date. Deci

$$\frac{x+y}{c} = \frac{y+z}{a} = \frac{z+x}{b} = \frac{2\,(x+y+z)}{a+b+c} \ .$$

Intre ultimul raport şi fiecare din rapoartele ce-l preced în care s'a multiplicat numărătorul şi numitorul cu 2, se face raportul diferenţei numărătorilor şi diferenţei numitorilor. Se obţine

$$\frac{2z}{a+b-c} = \frac{2x}{b+c-a} = \frac{2y}{a+c-b} = \frac{2cz}{c\,(a+b-c)} = \frac{2ax}{a\,(b+c-a)}$$

$$= \frac{2by}{b\,(a+c-b)} = \frac{2\,(ax+by-cz)}{c^2 - a^2 - b^2 + 2ab} = \frac{2\,(ax+by-cz)}{c^2 - (a-b)^2}$$

$$= \frac{2\,(ax+by-cz)}{(c-a+b)\,(c+a-b)} \ .$$

Deci, avându-se în vedere şi a 2-a ecuaţie

$$\frac{x}{b+c-a} = \frac{y}{a+c-b} = \frac{z}{a+b-c}$$

$$= \frac{1}{(a+b-c)\,(b+c-a)\,(c+a-b)} \ .$$

De unde,

$$x = \frac{1}{(a+b-c)(a+c-b)}, \quad y = \frac{1}{(b+a-c)(b+c-a)},$$

$$z = \frac{1}{(c+a-b)(c+b-a)}.$$

V. 52. Să se rezolve inecuaţiunea :

$$0 < \frac{5x+7}{2x+3} < 1.$$

C. I. B.

I. $$\frac{5x+7}{2x+3} > 0.$$

Va trebui să existe pentru aceleaşi valori ale lui x

1) $5x+7>0$ şi $2x+3>0$

sau

2) $5x+7<0$ şi $2x+3<0$.

1) Rezvolvând inecuaţiile în prima ipoteză şi combinând rezultatele se află

$$x > -\frac{7}{5}.$$

2) In a doua,

$$x < -\frac{3}{2}.$$

II. $$\frac{5x+7}{2x+3} < 1 \quad \text{sau} \quad \frac{3x+4}{2x+3} < 0.$$

Şi vor trebui verificate de acelaş x

3) $3x+4>0$ şi $2x+3<0$

sau

4) $3x+4<0$ şi $2x+3>0$.

In cazul 3) se află pentru prima inecuație $x > -\frac{4}{3}$, pentru a doua, $x < -\frac{3}{2}$ și se vede că nu pot exista valori cari să le verifice pe amândouă.

4) $$-\frac{3}{2} < x < -\frac{4}{3}.$$

III. Combinând rezultatele rezolvării inecuațiilor I și II se conchide

$$-\frac{7}{5} < x < -\frac{4}{3}.$$

V. 53. Fie A *unul din punctele comune a două cercuri* O_1 *și* O_2; *pnnctele* B *și* C *diametral opuse lui* A *în aceste cercuri;* L *mijlocul segmentului* $\overline{BC}$; M *și* N *punctele în care o dreaptă oarecare trecând prin* A *întâlnește cele două cercuri:*

Să se arate, că L *este egal depărtat de punctele* M *și* N.

N. B.

$$BM \perp MN\ ,\ CN \perp MN.$$

Deci patrulaterul BMNC este trapez dreptunghiu. Perpendiculara pe mijlocul înălțimei MN trece și prin mijlocul L al laturei neparalele BC.

V. 54. Se consideră două triunghiuri ABC, A'B'C' *în același plan, astfel ca:* $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\overline{AC} = \overline{A'C'}$, AB *perpendicular pe* A'B'; AC *perpendicular pe* A'C', *unghiurile* BAC *și* B'A'C' *fiind suplimentare.*

Să se arate că perpendiculara coborîtă din A *pe* B'C' *trece prin mijlocul lui* $\overline{BC}$, *iar perpendiculara coborîtă din* A' *pe* BC *trece prin mijlocul lui* $\overline{B'C'}$.

N. B.

Fie C'' simetricul lui C în raport cu A. Avem:

$$\Delta\, ABC'' = \Delta\, A'B'C'$$

căci au un unghiu egal cuprins între două laturi respectiv egale. Deoarece $AB \perp A'B'$, $AC'' \perp A'C'$ rezultă și

$$BC'' \perp B'C'.$$

Deci perpendiculara în A pe B'C' este paralelă cu BC'' și trece prin mijlocul lui BC.

V. 56. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$(x+1)(a^2-1)(a^3+1)+(x-1)(a^2+1)(a^3+1)$$
$$=(x+1)(a^2+1)(a^3-1)+(x-1)(a^2-1)(a^3-1).$$

N. B.

$$x=a.$$

V. 57. Să se rezolve ecuaţiunea:

$$(a+1)(b+1)(x-a)+(a-1)(b-1)(x+a)$$
$$=(a-1)(b-1)(x-a)+(a+1)(b-1)(x+a).$$

N. B.

$$x=\frac{a(a+2b-1)}{a+1}.$$

V. 58. Să se simplifice fracţiunea:

$$\frac{(x+1)(x^2-1)(x^3+1)+(x-1)(x^2+1)(x^3+1)-(x-1)(x^2-1)(x^3-1)}{x^5+x^3-x^2-1}.$$

N. B.

Fracţiunea se scrie:

$$\frac{(x^3-1)(x^2+1)(x+1)}{(x^3-1)(x^2+1)}=x+1.$$

V. 59. Să se simplifice fracţiunea:

$$\frac{(x+1)(y+1)(x-y)-(x-1)(y+1)(x-y)+(x+1)(y-1)(x+y)}{x^2-xy+y-x}$$

N. B.

Fracţiunea se scrie:

$$\frac{(x-1)(y-1)(x-y)}{(x-1)(x-y)}=y-1.$$

V. 60. Dacă bc = ad, *să se verifice egalitatea:*

$$1-\frac{4(ab+cd)}{(a+b)^2+(c+d)^2}=\left[1-\frac{2}{1+\frac{a+c}{b+d}}\right]^2.$$

C. I. B

Condiția impusă se scrie

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

De unde,

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}=\frac{a-b+c-d}{a+b+c+d}$$

sau

$$\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}=\frac{(c-d)^2}{(c+d)^2}=\left(\frac{a-b+c-d}{a+b+c+d}\right)^2.$$

Și cum

$$(a-b)^2+(c-d)^2=(a+b)^2+(c+d)^2-4(ab+cd)$$

iar

$$a-b+c-d=(a+b+c+d)-2(b+d)$$

$$1-4\frac{ab+cd}{(a+b)^2+(c+d)^2}=\left[1-2\frac{b+d}{a+b+c+d}\right]^2$$

sau

$$1-\frac{4(ab+cd)}{(a+b)^2+(c+d)^2}=\left[1-\frac{2}{1+\frac{a+c}{b+d}}\right]^2.$$

V. 64. Intr'un triunghiu dreptunghiu, fie i *porțiunea din bisectoarea corespunzătoare unghiului drept, cuprinsă între vârf și ipotenuză,* c *lungimea unei catete.*

Să se calculeze aria triunghiului.

C. I. B.

Fie ABC triunghiul — dreptunghiu în B, A′ piciorul bisectoarei unghiului drept, A″ punctul în care paralela dusă prin A′ la AC tae latura AB, c lungimea lui $\overline{AB}$.

Triunghiul A′A″C e dreptunghiu şi isoscel, deci

$$\overline{A'A''} = \frac{i}{\sqrt{2}} \quad , \quad \overline{AA''} = \frac{i}{\sqrt{2}} \quad , \quad \overline{A''B} = \frac{c\sqrt{2} - i}{\sqrt{2}} .$$

Din asemănarea triunghiurilor ABC, A″BA′ urmează

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'A''}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A''B}} \quad , \quad \overline{Ac} = \frac{ci}{c\sqrt{2} - i} .$$

Deci

$$\text{aria } ABC = \frac{c^2 i}{2\,(c\sqrt{2} - i)}$$

Clasa VI-a. *Exerc. 56. Să se verifice identitatea.*

$$\operatorname{tg}(a - b) + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \,.\, \operatorname{tg}(a - b) \equiv \operatorname{tg} a.$$

Să se deducă apoi identitatea (VII. 9):

$$\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} 2a + \operatorname{tg} 3a \equiv \operatorname{cotg} a \,.\, \operatorname{cotg} 2a \operatorname{tg} 3a.$$

N. B.

Făcând în prima relaţie înlocuirea:

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$$

se obţine $\operatorname{tg} a \equiv \operatorname{tg} a$.

Dacă în prima relaţie înlocuim pe a şi b respectiv cu $\frac{\pi}{2} + 2a$ şi $3a$ obţinem pe cea de-a doua.

VI. 62. Dacă

$$\frac{\sin(a + b)}{\sin(a - b)} = \frac{\sin(c + d)}{\sin(c - d)}$$

există şi relaţia

$$\frac{\cos(a + d)}{\cos(a - d)} = \frac{\cos(c + b)}{\cos(c - b)} .$$

C. I. B.

Din proporția

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \quad , \quad \text{se deduce} \quad \frac{A+B}{A-B} = \frac{C+D}{C-D} .$$

Aplicând această proprietate condiției date și făcând expresiile calculabile prin logaritmi, se găsește

$$\frac{\sin a \cos b}{\sin b \cos a} = \frac{\sin c \cos d}{\sin d \cos c}$$

sau

$$\frac{\sin a \sin d}{\cos a \cos d} = \frac{\sin b \sin c}{\cos b \cos c} .$$

Aplicând din nou proprietățile enunțate se găsește relația cerută.

VI. 63. Dacă

$$\frac{\sin (a+b)}{\sin (a-b)} = \frac{\sin (b+c)}{\sin (b-c)}$$

există și relația

$$\frac{\cos (a+c)}{\cos (a-c)} = \cos 2b.$$

C. I. B.

Se deduce din VI. 62 în care facem

$$c = b \ , \ d = c.$$

VI. 64. Dacă tg$b$ *este medie proporțională între* tg$a$ *și* tg$c$,

$$\sin (a+b) \sin (b-c) = \sin (a-b) \sin (b+c).$$

C. I. B.

In VI. 65 se face

$$a_1 = a \ , \ b_1 = a_2 = b \ , \ b_2 = c.$$

VI. 65. Dacă între unghiurile a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 *există egalitățile*

$$\frac{\operatorname{tg} a_1}{\operatorname{tg} b_1} = \frac{\operatorname{tg} a_2}{\operatorname{tg} b_2} = \frac{\operatorname{tg} a_3}{\operatorname{tg} b_3} .$$

Să se arate că există şi egalităţile

$$\frac{\sin(a_1 + b_1)}{\sin(a_1 - b_1)} = \frac{\sin(a_2 + b_2)}{\sin(a_2 - b_2)} = \frac{\sin(a_3 + b_3)}{\sin(a_3 - b_3)}.$$

C. I. B.

Din egalităţile date avem:

$$\frac{\operatorname{tg} a_1 + \operatorname{tg} b_1}{\operatorname{tg} a_1 - \operatorname{tg} b_1} = \frac{\operatorname{tg} a_2 + \operatorname{tg} b_2}{\operatorname{tg} a_2 - \operatorname{tg} b_2} = \frac{\operatorname{tg} a_3 + \operatorname{tg} b_3}{\operatorname{tg} a_3 - \operatorname{tg} b_3}.$$

Şi făcându-le calculabile prin logaritmi,

$$\frac{\sin(a_1 + b_1)}{\sin(a_1 - b_1)} = \frac{\sin(a_2 + b_2)}{\sin(a_2 - b_2)} = \frac{\sin(a_3 + b_3)}{\sin(a_3 - b_3)}.$$

VI. 67. Să se determine unghiurile unui romb ştiind că raportul dintre aria patratului având ca laturi suma diagonalelor rombului şi aria rombului, este 12.

C. I. B.

Notând $2a$, $2b$ lungimile celor 2 diagonale,

$$\frac{(2a + 2b)^2}{2ab} = 12$$

sau

$$(a + b)^2 = 6ab$$

sau

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 4\frac{a}{b} + 1 = 0.$$

Şi dacă 2α este unghiul rombului opus diagonalei a,

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Deci:

$$\operatorname{tg}^2\alpha - 4\operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$$

care dă

$$\operatorname{tg}\alpha = 2 \pm \sqrt{3} \qquad \text{etc.}$$

Clasa VII-a. *Exerc. 36. Să se verifice egalitatea:*

$$\begin{vmatrix} \operatorname{tg}^2 a & \operatorname{cotg} a & \operatorname{cotg} a \\ 2 & \operatorname{tg} a & \operatorname{cotg} a \\ \operatorname{cotg}^2 a & \operatorname{cotg} a & \operatorname{tg} a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{cotg}^2 a & \operatorname{tg} a & \operatorname{tg} a \\ 1 & \operatorname{cotg} a & \operatorname{tg} a \\ \operatorname{tg}^2 a & \operatorname{tg} a & \operatorname{cotg} a \end{vmatrix}.$$

C. I. B.

Se consideră funcțiunea

$$f(x) = \begin{vmatrix} x^2 & \frac{1}{x} & \frac{1}{x} \\ 1 & x & \frac{1}{x} \\ \frac{1}{x^2} & \frac{1}{x} & x \end{vmatrix} = \frac{1}{x^4} \begin{vmatrix} x^3 & 1 & 1 \\ x & x^2 & 1 \\ 1 & x & x^3 \end{vmatrix}.$$

Desvoltând acest ultim determinant după elementele primei linii,

$$f(x) = \frac{1}{x^4}(x^8 - 2x^4 + 1) = \left[x^2 - \frac{1}{x^2}\right]^2.$$

Se vede astfel că

$$f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Și dacă

$$x = \operatorname{tg} a \ , \ \frac{1}{x} = \operatorname{cotg} a,$$

obținem

$$f(\operatorname{tg} a) = f(\operatorname{cotg} a)$$

egalitate ce reprezintă tocmai pe aceea cerută.

VII. 45. Să se demonstreze identitatea:

$$(x+a)^n - (x+b)^n + C_n^1[(x+a)^{n-1} b - (x+b)^{n-1} a] + C_n^2[(x+a)^{n-2} b^2 - (x+b)^{n-2} a^2] + \ldots + C_n^{n-1}[(x+a) b^{n-1} - (x+b) a^{n-1}] + b^n - a^n \equiv 0.$$

N. B.

In prima parte avem desvoltarea după binomul lui NEWTON a expresiei

$$[(x+a)+b]^n - [(x+b)+a]^n .$$

VII. 46. Să se arate că determinantul:

$$D \equiv \begin{vmatrix} x-b & x-c & a(b-c) \\ x-c & x-a & b(c-a) \\ x-a & x-b & c(a-b) \end{vmatrix}$$

are valoarea:

$$-(a-b)(b-c)(c-a)(3x-a-b-c).$$

N. B.

Adunând primei linii suma celorlalte două:

$$D \equiv \begin{vmatrix} 3x-a-b-c & 3x-a-b-c & 0 \\ x-c & x-a & b(c-a) \\ x-a & x-b & c(a-b) \end{vmatrix}$$

$$= (3x-a-b-c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x-c & x-a & b(c-a) \\ x-a & x-b & c(a-b) \end{vmatrix}.$$

In noul determinant scădem elementele primei coloane, din cele ale celei de a doua:

$$D = (3x-a-b-c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x-c & c-a & b(c-a) \\ x-a & a-b & c(a-b) \end{vmatrix}$$

$$= (3x-a-b-c) \begin{vmatrix} c-a & b(c-a) \\ a-b & c(a-b) \end{vmatrix}$$

$$= (3x-a-b-c)(a-b)(c-a) \begin{vmatrix} 1 & b \\ 1 & c \end{vmatrix}$$

$$= -(3x-a-b-c)(a-b)(b-c)(c-a).$$

Până la 15 Maiu s'au primit soluțiuni bune pentru exercițiile publicate în numerele 6, 7, 8 dela: [1]).

Liceul de fete „Avântul Cultural" București.

Clasa V-a: BURICHOVICI S. CLARISSA (V: 66, 67), PENCHAS ANELLY (V: 66, 67).

Școala Centrală de fete „Marica Brâncoveanu" București.

Clasa II-a: HALUNGA SPERANȚA (IV: 64, 65, 68*), MIHĂILESCU TEODORA (IV: 64, 65, 66, 67, 68), TULLEA VIORICA (IV: 64, 65).

Clasa IV-a: ALEXE LUCIA (IV: 64, 65, 66, 67, 68*, V: 66), BARBU IOANA (IV: 61, 64, 65, 66, 67, 68*, V: 67), BUCESCU IVONNE (IV: 52, 53, 54, 58, 64, 65, 66*, 67, 68*, V: 66), DUMITRESCU EL. (IV: 61, 64, 65, 66, 67, 68*, V: 66, 67), DUMITRESCU ZOE (IV: 61, 64, 65, 66, 68*), IONESCU FL. (IV: 64, 65*, 66*, 67*, 68*, V: 66), IONESCU NINA (IV: 64, 65*, 66, 68* V: 66), KESTLER MIMI (IV: 64, 66), NICOLAU EL. (IV: 61, 64, 65, 66, 67, 68*, V: 66, 67), OPREAN VIORICA (IV: 61, 64, 65, 66, 67, 68*, V: 67), STĂNESCU MARIA (IV: 64, 65, 66, 67, 68*, V: 66, 67), STOICA MARIA (IV: 64*, 65*, 66, 67, 68*), TOCITU VIORICA (IV: 61, 64, 65, 66, 67, 68*, V: 66), TONCESCU DESPINA (IV: 64, 65, 68*, V: 67), TRIFON MELANIA (IV: 61, 64, 65, 66, 67, 68*), VASILESCU PAULA (IV: 64, 66, 67), VETTU PAULINA (IV: 64, 65*, 66*, 67).

Clasa V-a: LUPU MARIA (VI: 52*, 53*), NASTA AMELIA (V: 48*, 49*, 54*, 55*), STĂNESCU VIRGINIA (V: 56*, 57*, 58*, 60*, VI: 52*, 53*, 54*).

Clasa VI-a: PERKER LOLA (VI: 50, 52*, 54*, 55).

Liceul de fete „Domnița Ileana" București.

Clasa IV-a: BĂDULESCU VIORICA (IV: 61, 63, 64*, 65*, 67*, 68 V: 69), ERBLICH ELSA (IV: 51, 52, 53, 61, 64, 65, 66, 67, 68*), FLORICICĂ ELENA (IV: 44, 45, 46, 48, 57, 58, 64, 65, 66, 67, 68*).

Clasa VI-a: RUSEI ANA (VI: 50, 52*, 53*, 54*).

Liceul de fete „Regina Maria" București.

Clasa III-a: CLEJAN ALICE (IV: 64, 65, 66, 67, 68* VI: 71), COHN LYDIA (IV: 64, 65, 66, 67, 68*), GRENDRICH IRMA (IV: 64, 67, 68*), MIHAIL JVONNE (IV: 64, 66, 67, 68*), IONESCU VENERA (IV: 64, 65, 66, 67), MISSIR COLETTE (IV: 64, 65, 67,), MONDSCHEIM NORA (IV: 64, 65, 66, 67, 68*), NEGREANU IOSEFINA (IV: 64, 65, 66, 67, 68*), PĂIȘ NINA (IV: 64, 65, 66, 67, 68 V: 53), POPPER EDITH (IV: 64, 65, 66, 67).

Clasa V-a: BERKOVITZ GABY (V: 66), PETRESCU MARIANA (V: 66).

Clasa VI-a: TĂNĂSESCU VENERA (VI: 58, 59, 60*, 63*, 64*, 65*, 66*, 67*, 68*, 69*, 70*, 71*. 72*, 73*, 75*, 76*, 77*, 78*).

---

1) Semnul * însoțește numărul unui exercițiu rezolvat foarte bine.

Institutul ortodox internat Bucureşti.

Clasa IV-a: OTETELEŞANU RUXANDRA (IV: 64, 65, 66, 67).
Clasa VI-a: LAZAROVICI ROZICA (VI: 72, 73*).

Externatul ortodox „Zoe Râmniceanu" Bucureşti.

Clasa VI-a: ROCIU MARG. (VI: 73*).

Liceul „Iorgu Radu" Bârlad.

Clasa IV-a: ZUZULA ELENA (V: 50, 58*, 59*, 66).

Liceul de fete Beiuş.

Clasa IV-a: LUCACIU ELIS (IV: 64, 66, 67, V: 66).

Liceul „Dr. C. Angelescu" Buzău.

Clasa VII-a: IONESCU FILOFTEIA (VII: 44*, 56*, 57*).

Liceul „Principesa Dadiani" Chişinău.

Clasa IV-a: LACTIONOV GALLYNA (IV: 64, 65 66, 67, 68*).

Liceul „M. Kogălniceanu" Galaţi.

Clasa VI-a: GRIGORIU STELA (VI: 55, 56, 57).

Institutul „Notre Dame de Sion" Galaţi.

Clasa VI-a: ANDONIE MIOARA (VI: 52*).

Liceul „Despina Doamna" Ploeşti.

Clasa IV-a: IVĂNCEANU ALICE (VI: 68*), PETRESCU MIETA (IV: 41, 61, 64, 65, 66).

Şcoala normală „Andrei Şaguna" Sibiu.

Clasa V-a: IONESCU LAETIŢIA (V: 56*, 57*, 66, 67, 68).

Liceul „Aurel Vlaicu" Bucureşti.

Clasa IV-a: FULGA T. (IV: 41*, 47*, 64, 65, 66, 67, 68*, V: 50*, 66), HORVAT S. (IV: 64, 65, 66, 67).
Clasa VI-a: BUZESCU V. (VI: 71*, 72, 73*, 74*, 78).

Liceul „Mihai Viteazul" Bucureşti.

Clasa IV-a: CÂRNARU I. O. D. (IV: 45, 46, 48), GROZDEA D. M. (IV: 45, 48, 51, 55, 58), HOREZEANU M. S. (IV: 66, 67).
Clasa V-a: ZUPERMAN M. (V: 47, VI: 52, 53, 54).
Clasa VI-a: CRISTESCU I. G. (VI: 50).

Liceul „Cantemir Vodă" Bucureşti.

Clasa V-a: PÂRCĂLĂBESCU A. (V: 66).

Clasa VI-a: DINESCU R. (VI: 50, 52*, 53*, 54*, 55, 58*, 59*, 60*, 69), GEORGESCU N. N. (VI: 61, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 69).

Liceul „Mihail Eminescu" Bucureşti.

Clasa IV-a: ROTARU A. M. (IV: 46).

Clasa VI-a: POMPONIU L. (VI: 71*, 72*, 73*, 74*, 75*).

Liceul „Gh. Lazăr" Bucureşti.

Clasa IV-a: MIULESCU M. (IV: 44, 45, 46, 47, 48*, 51*, 52, 53*, 55*, 56, 57, 58, 61, 64, 65, 66, 67, 68*).

Clasa V-a: DROUHET ED. (V: 66).

Clasa VI-a: BEGU I. ST. (VI: 73*, 77*, 78*), DRĂGHICESCU F. M. (VI: 50, VII: 48), GOLDENBERG I. H. (VI: 43, VII: 48).

Clasa VII-a: CHIRICUTĂ T. I. (VII: 50). SEGAL ENRIC (VII: 43, 44)

Liceul „Matei Basarab" Bucureşti.

Clasa IV-a: HORODNICEANU I. S. (IV: 47), JACOBSOHN F. (IV: 61, 64, 65, 66, 67, 68*, V: 66).

Clasa V-a: NICULESCU D. (V: 66, 71), PRECIADO TH. (V: 48, 49, 53, 54, 55, 56*, 57*, 58*, 59*, 66*. 67, 71, VI: 53*, 54*), SAICHIM AD. (V: 66*, 67, VII: 39, 44, 48, 49, 56).

Clasa VI-a: ALEXANDRU GR. (VI: 52*, 53*, 54*), STERIADE D. (V: 66, 67), CRISTESCU GH. (VI: 57*), ŞTEFĂNESCU C. (VI: 71, 73*).

Seminarul pedagogic Bucureşti.

Clasa IV-a: BODNĂRESCU H. (IV: 61, 63*, 64, 65, 66, 67, 68*, V: 63*, 66, 67, 68*, 69*, 70*, VI: 51*, 71, 72). CONSTANTINESCU AL. (IV: 61, 64, 65, 66, 67, 68*), PROFETA ART. (IV: 61, 64, 67), SLOVENZ P., (IV: 61, 64, 65, 66, 67).

Clasa VII-a: CIOROIANU C. (VII: 44), VARLAM C. (VII: 40, 44, 46*, 47*, 54).

Liceul „Gh. Şincai" Bucureşti.

Clasa VI-a: ENE C. (VI: 60, 61, 67, VII: 40, 44*, 49, 51).

Clasa VII-a: ENE IOAN (VII: 48, 49, 50, 51, 56, 57, 58*), PARASCHIVESCU TH. (VII: 43, 44, 47*).

Colegiul naţional „Sf. Sava" Bucureşti.

Clasa IV-a: BĂDULESCU N. (IV: 51, 53, 54, 57, 58, 58, 61, 64, 65, 66, 67, 68*, V: 66), CIURESCU R. (IV: 61, 64, 65, 66, 67, 68*), ENESCU M. (IV: 41, 64), PÂRVULESCU O. (IV: 61, 65, 66, 67, V: 66), RĂDULESCU R. (IV: 41).

Clasa V-a: GEORGESCU GH. (V: 46, 47, 66, VI: 52*), STROESCU M. (V: 58*, 61*, 68*, VII: 51).

Clasa VI-a: DUMITRIU G. (VI: 52*, 53*, 55), GANE I. P. (VI: 69), MARINESCU N. (VI: 55, 56, 57).

Clasa VII-a: NEAGU V. (VII: 56, 57).

Liceul „Spiru Haret" Bucureşti.

Clasa IV-a. STĂNCULESCU M. (IV: 46, 48, 54, 57, 58, 64, 65, 66).

Clasa V-a: CHIRICEANU AL. (V: 56*, 58, 66*, 67*), DĂNILĂ P. (V: 46*, 47, 51, 56, 57, 58, 66), NAHMIAS V. (V: 56, 66).

Clasa VI-a: BODNĂRESCU B. (VI: 61, 62, 81, 82, 83).

Liceul „Moise Nicoară" Arad.

Clasa IV-a: BINDER I. (IV: 51, 52, 53, 54, 55, 58, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68*).

Liceul „I. Creangă" Bălţi.

Clasa VII-a: GROISMAN T. (VII: 39*, 44, 45*, 46*, 47), TALEL I. (VII 44, 45*, 46*, 47*).

Liceul „Codreanu" Bârlad.

Clasa IV-a: BEER E. IV: 44, 45, 46, 48, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 61, 64, 65, 66, 68*, V: 66), GEORGESCU V. C. (IV: 45, 46, 48). ŞECHTER S. (IV: 48, 51, 61), WIESENFELD L. (IV: 45, 46, 48, 51, 54, 58, 64. 65, 66, 68).

Clasa V-a: PALADE GEORGIAN (V. 50, 56, 58, 68, VII: 38).

Clasa VI-a: GHINEA I. (VI: 52*, 53*, 54*).

Clasa VII-a: IVĂNESCU P. I. (VII: 38, 43, 49, 50, 51, 54*, 56*, 57), NATHANSOHN (VII: 43, 49, 51).

Liceul „Samuil Vulcan" Beiuş.

Clasa IV-a: BARD Ş. (IV: 31, 33, 34, 44, 47, 51), JIDANU C. (IV: 31, 33, 34, 51, 61, 64, 65, 66, 67, V: 66), LAHATOS L. (IV: 51, 66, 67, 68*, V: 66).

Clasa V-a: BALOG C. (VI: 34, 35, 36, 44, 45, 46, 51), BOLCAŞ P. (VI: 44*), HERA I. (V: 46, 50), SILBERSTEIN V. (V: 56, 57, 58, 59, 66), TEIUŞANU I. (V: 46*, 47*, 50*, 56, 58*, 59*, 66, 67), WITTENBERGER L. R. (V: 33, 34, 37, 38, 46, 47*, 50*, 53*, VI: 44*).

Clasa VI-a: CHIRVOIU V. (VI: 35, 36, 37, 39, 44, 45, 46, 49, 51, 55, 61), HOMPOLA T. (VI: 41, 49, 51*, 55*, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 73*, 75, VII: 43 44, 46, 49, 50, 51), MARŢIAN M. (VI: 35, 36, 39, 44, 45, 46, 48, 49, 51, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 73, 74, VII: 48), MARICA POMPEIU (VI: 35, 36, 37. 41, 42, 44*, 45, 46, 48, 49, 51, 55, 61, 64, 65*, 69, 70, 73*, 75*, VII: 43, 46, 47* 48, 49, 50, 51), SNESIE F. R. I. (VI: 35, 36, 45*, 49, 50, 51*, 55).

Clasa VII-a: POPA N. (VII: 35, 44, 47, 48, 49, 50, 51,)

Liceul „Laurian" Botoşani.

Clasa IV-a: BÂZOIANU M. (IV: 51, 52, 54, 64, 65, 66, 67, 68), CIOMAGA I. (IV: 35, 36, 51, 53, 58, 61 64, 65, 66, 67, 68*), SÂRBU V. (IV: 35, 45, 46, 47, 48, 51, 52, 53, 57, 64, 65, 66, 67, 68*), TOBESCU M. (IV: 41, 48, 50, 53, 54, 57, 58, 64, 66, 67, 68*).

Clasa V-a: BARAS I. M. (V: 34, 35, 36), SEMACA D. (V: 47*, 55*),

Clasa VI-a: BAJUREANU G. G. (VI: 30*, 31*, 32, 33*, 39*, 44*, 45*. 46), ŞOIMAN D. I. (VI: 26*, 30*, 31*, 32*, 33*, 39*, 44*, 46*).

Liceul „N. Bălcescu" Brăila.

Clasa VII-a: GOLDENBERG M. (VII: 56, 57, 68).

Şcoala comercială superioară Brăila.

Clasa I-a: FANEA C. (IV: 61, 64 65, 66, 67, 68), VRÂNCEANU N. (IV: 61, 64, 65, 66, 67, 68*).

Liceul „B. Haşdeu" Buzău.

Clasa IV-a: NICOLAU M. (IV: 61, 64, 65, 66, 68*).

Clasa V-a: NICOLAU L. (V: 58, 59, 66, 67).

Liceul „V. Lucaciu" Careii Mari.

Clasa VII-a: POPOVICI G. (VII: 31, 32*, 36, 44, 47*, 49, 51).

Liceul „Dinicu Golescu" C.-Lung Muscel.

Clasa VII-a: POPESCU V. FL. (VII: 45*, 48, 54, 56, 57).

Liceul „B. Haşdeu" Chişinău.

Clasa VI-a: SEBEL I. (VI: 50, 53*, 57, 60*, 65, 72*, 73).

Liceul „G. Barițiu" Cluj.

Clasa V-a: NIȚESCU G. (V: 46*, 47*, 49*, 50*, 51*, 53*, 54*, 55*, 56*, 58*, 59, 65, 66*, 67*, 68*, 69*, 70*, VI: 65*, 71*, 73, 76*, 77*, 78*, VII: 41, 42, 49).

Seminarul pedagogic Cluj.

Clasa IV-a: BORZA AL. (VI: 31, 34, 45, 46, 48, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 61, 64, 65, 66, 67, 68*, V: 66, 67), ESCA A. (IV: 41, 64, 65, 66, 68*), FLORIAN T. (IV: 44, 45, 46, 48, 64, 65, 66, 67, 68*), KAUNTZ I. (IV: 34, 36, 44, 45, 46, 47, 48, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 61, 64, 65. 66, 67, 68*, V: 35, 37, 38, 46*, 49*, 50*, 56*, 57*, 66 VI: 51, VII: 44*), VĂIANU TH. (IV: 33, 34, 42, 44, 45, 46, 48, 51, 52, 65, 66, 67, 68*).

Liceul „Mircea cel Bătrân" Constanța.

Clasa IV-a: PĂPURICĂ C. (IV: 44, 48, 51, 61, 64, 65, 66, 67, 68*), PREDA N. (IV: 64, 65, 68).

Clasa VII-a: POMBUCDJIAN K. (VII: 44, 54, 57).

Liceul „St. Popescu" Corabia.

Clasa VII-a: CARDARA G. (VII: 36, 43, 44, 46*).

Colegiul național „Carol I" Craiova.

Clasa III-a: DINCULESCU M. (IV: 64, 65, 66, 67, 68*), POPILIAN I. (IV: 64, 65, 66, 67, 68*).

Clasa IV-a: CICEIU CETATE (IV: 51, 52, 54, 58, 64, 65, 66, 68*, V: 56), PEȚEREA V. (IV: 41, V: 47), POPESCU OCT. (IV: 41, 44, 45, 46, 47, 48, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58 63, 64, 65, 66, 67, 68*, V: 46*, 47*, 49*, 50, 53*, 55*, 56, 66, VII: 52*).

Clasa V-a: BIȚĂ T. (V: 50*, 56*, 57*), BRĂDIȘTEANU R. (V: 56*, 58*), MANOLESCU G. (V: 56*), PETECEL I. (V: 56*, 58*, 66).

Clasa VI-a: BUGEANU P. (VI: 43, 50, 52, 53*, 54, 56*, 57*, 59, 60*).

Clasa VII-a: AVRĂMOIU E. (VII: 51), CERCELARU D. (VII: 51, 57), CHEVRILESCU M. (VII: 39*, 43, 44*, 45*, 46*, 47*), MOISOVICI S. (VII: 43, 45, 51, 57), TĂNĂSESCU N. I. (VII: 43*, 49, 50, 51), TRUȘCULESCU G. P. (VII: 51), TURCU V. (VII: 51).

Liceul „Unirea" Focșani.

Clasa V-a: NADOLU ANDREI (V: 46*, 47*, 49, 50*, VI: 52*, 53*, 54*).

Clasa VII-a: MARTAC V. R. (VII: 49).

Liceul „V. Alecsandri" Galați.

Clasa IV-a: DRUGAN A. (IV: 51, 52, 64, 66, 67).

Liceul Internat Iași.

Clasa IV-a: DANTUȘ T. (IV: 44, 45, 46, 48), LĂBUȘCĂ N. N. (IV: 27), SAVA V. (IV: 32).

Clasa VI-a: CÂRLAN M. (VI: 35, 36, 39, 44*, 45*, 46), HOLBAN R. (VI: 52, 55, 60, 70), MATEI D. (VI: 35, 36, 39, 44, 45, 46, 50, 52*, 53*).

Liceul Național Iași.

Clasa V-a: IONESCU C. (V: 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33*, 34, 35, 36, 37*, 38*, 39*. 40*, 41, 42, 44, 46*, 47*, 50*, 53*, 54*, 55*).

Liceul „C. Brediceanu“ Lugoj.

Clasa V-a: STAMATE I. (V: 46, 47*, 50*, 61, 63*, 66, 67).
Clasa VI-a: BERINDE V. T. (VI: 35*, 36*, 44, 45, 46, 52*, 53*, 54*, 55), PETRIC S. (VI: 52, 53, 54, 55).

„Gimnaziul Modern“ Craiova.

Clasa IV-a: SITARU S. A. (IV: 32, 33, 46, 48).

Liceul „Radu Greceanu“ Slatina-Olt.

Clasa VII-a: DUMITRESCU P. AL. (VII: 32*, 36*).

Liceul „Frații Buzești“ Craiova.

Clasa VII-a: AMĂRĂȘTEANU I. M. (VII: 30*, 38, 41, 49, 50, 51, 53*).

Liceul „D. A. Sturdza“ Tecuci.

Clasa VII-a: ANDRONIC ST. M. (VII: 38, 40, 41, 42).

Liceul „Durostor“ Silistra.

Clasa VII-a: TOPSACALIAN (VII: 49, 50, 51).

Liceul „Știrbei-Vodă“ Călărași.

Clasa VII-a: ROȘCULEȚ N. N. (VII: 44, 45*, 46*, 47*, 49).

Gimnaziul mixt „N. Titulescu“ Pucioasa.

Clasa IV-a: IONESCU G. M. (IV: 46, 47, 48), MALTEZEANU I. M. (IV: 45, 46, 48, 51, 52, 53), PODOREANU I. G. (IV: 46, 48, 51).

Liceul „Tudor Vladimirescu“ Tg.-Jiu.

Clasa IV-a: JACOBINI V. P. (IV: 45, 46, 48).

Liceul „T. Dumitrescu“ Mizil.

Clasa IV-a: BUZNEA C. R. (IV: 44, 45, 46), GEAMBAȘU T. (IV: 61, 64, 65, 66, 67, 68*), MAZILU I. (IV: 61, 64, 65, 66, 67, 68*), POPESCU M. A. (IV: 44, 45, 46), TEODORESCU C. (IV: 66, 67, 68*).

Liceul „Vasile Lupu“ Orheiu.

Clasa IV-a: LANERSCHI P. A. (IV: 32, 46, 51, 55, 57). TARAȘIUC S. (IV: 61, 64, 65, 66, 68*).

Liceul „Roman Vodă“ Roman.

Clasa V-a: DĂNILĂ I. I. (V: 56*, 57*, 58*, 59*, 60*, 61*, 62*).
Clasa VI-a: ROSENBERG I. (VI: 45, 46, 52*, 53*, 54*, VII: 44).

Liceul „C. Diaconovici" Timişoara.

Clasa IV-a: CIUGUDEAN C. (IV: 46, 55, 64*, 65, 66, 67), EVUŢEANU G. (IV: 51*, 52, 53, 54*, 55*, 56*, 57, 58, 61, 64, 65, 66, 67), GROPŞANU I. Z. (IV: 32, 33, 55, 56), HERBERGER E. (IV: 51, 52, 55, 56, 57, 58, 61, 64, 65, 66, 67, 68*), PINTEA V. V. (IV: 51, 55, 57, 58(, STOICA O. (IV: 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68*,) TĂRAN P. V. (IV: 51, 52, 56).

Clasa V-a: BABEŢIU C. (V: 66, VI: 52*), HONAE A. C. (V: 47, 56*, 57*, 58, 59*, 60, 61, 62, 63), MORARIU T. (V: 46*, 66*, 68, VI: 52*, 53*, 54*, VII: 44), POPESCU G. T. (V: 39, 56*, 57*, 58, 59, 61, VI: 51*), SUBONI C. (V: 37, 39*, 47, 50*).

Liceul militar „Ştefan cel Mare" Cernăuţi.

Clasa V-a: ANDREI S. (V: 56*, 57*), ARHIPESCU C. (V: 56, 57*, 59*), ARSENESCU I. (V: 57*), BANCEA N. (V: 56*), BĂNICĂ G. (V: 57*), BARTIC G. (V: 56*), BODOLEA L. (V: 56*, 59*), BOŞOLDEA G. (V: 56, 57*, 59*), CIOCEANU A. (V: 56), CRUŢESCU T. (V: 56*, 57*), DUMITRESCU V. (V: 56*, 59*), GHEORGHIU A. (V: 57*), IONESCU M. (V: 59*), MAZILU G. D. (V: 57*), MINACIU N. (V. 57*), MITITELU C. (V: 56*, 57), NEDELCU N. (V: 57*, 66*), NEGULESCU A. (V: 56*, 57*), NISTORESCU D. (V: 56*, 59*), ROMANO M. (V: 56*, 57*), RUSSU E. (V: 48*, 56*, 59*), ŞTEFANOV S. (V: 56*), TEODOREANU N. (V: 56*, 57*, 59*), TOMESCU T. (V: 56*, 59*, 66*), VIERU M. (V: 56*, 59*).

Clasa VI-a: CARAMAN V. (VI: 71), GALAN I. (VI: 71*), RUNCEANU C. (VI: 71*, 74*), TANASICIUC C. (VI: 71, 74*).

Liceul militar „Regele Ferdinand" Chişinău.

Clasa V-a: CONSTANTINESCU S. (V: 56*, 57, 58*, 59*, 60, 61, 66, 67), PĂDUREŢ V. (V: 56*, 57, 58*, 59*, 61, 66, 67).

Clasa VI-a: BULAT M. (VI: 53*, 56*, 57*, 77, 78).

Clasa VII-a: FLORESCU G. H. (VII: 30, 34, 36, 43, 44, 46, 47*).

Liceul militar „D. A. Sturdza" Craiova.

Clasa II-a: BOSTENARU (IV: 64, 65. 67), CĂTULESCU E. (IV: 64, 65, 67, 68*), CONSTANTINESCU M. (IV: 64, 65, 67), HÂNCU T. (IV, 64, 65, 67, 68*), HUREZEANU N. (IV: 64, 65, 68*), MAVRIGHIE M. (IV: 64, 65, 67, 68), MAVRODIN S. (IV: 68*), NEAGU N. (IV: 64, 65, 67, 68*), PALIU T. (IV: 64), PĂUNESCU G. (IV: 64, 65, 67, 68*), POPESCU M. (IV: 64, 67), ŢUCĂ A. (IV: 64, 65, 67, 68*), ŢUCĂ M. (IV: 64, 65, 67, 68).

Clasa V-a: CONSTANTINESCU T. (V: 50), DRAGOMIRESCU I. (VI: 52*, 53*, 54*), GRIGORESCU T. (V: 50*, 53*, 54*, 55*, 58), IONESCU C. (V: 47, 49, 50*, VI: 53*, 54*), POPESCU G. (V: 46*, 66*, 67, VII: 52*, 54*), ROŞCA I. (V: 47, 50*), ŢOŢOC D. (V: 66*).

Clasa VI-a: RACOŢEANU C. (VI: 29, 30, 31, 52*, 53*, 54*).

Clasa VII-a: BĂDOI I. (VII: 56, 57, 58), BĂRBULESCU P. (VII: 56, 57), BERCULESCU I. (VII: 56, 57, 58), BUSUIOC I. (VII: 56, 57, 58), CATRINA C. (VII: 56, 57, 58), CAVAROPOL M. (VII: 47, 56, 57, 58), CAVAROPOL N. (VII: 47, 56, 57, 58), CIOC A. (VII: 56, 57, 58), CIORTEA G. (VII: 56, 57), COLTOFEANU A. (VII: 56, 57. 58), CUNA S. (VII: 56, 57), DULĂMIȚĂ I. (VII: 45*, 56, 57, 58), DUMITRESCU A. (VII: 44, 45*, 46, 48, 56, 57, 58), DUMITRESCU A. M. (VII: 56, 57, 58), DUMITRESCU I. M. (VII: 56, 57), DUMITRU I. (VII: 44, 46*, 56, 57), GABOR I. (VII: 56, 57, 58), GEORGESCU G. (VII: 44, 45*, 48*, 56, 57, 58), GEORGESCU I. (VII: 44, 45*, 46*, 56, 57), GROSSU P. (VII: 44, 46*, 56, 57), IONESCU GR. (VII: 44, 46*, 56, 57), IONESCU ILIE (VII: 56, 57, 58), IONESCU IOAN (VII: 48, 56, 57), IOSUB T. (VII: 56, 57, 58), MIHAI G. (VII: 56, 57, 58), MIHĂILESCU I. (VII: 46, 56, 57, 58), MILCOVEANU C. (VII: 56, 57, 58), MITRE G. (VII: 56, 57), NICOLAESCU N. (VII: 44, 45*, 46*, 56, 57), PARISIANU M. (VII: 45*, 48, 56, 57, 58), PESTRIȚU M. (VII: 56, 57, 58), PETRESCU G. (VII: 44, 45, 46, 56, 57, 58), SÂRBU V. (VII: 56, 57, 58), SAVIN R. (VII: 44, 57), SEGĂRCEANU M. (VII: 56, 57), TABACU I. (VII: 46, 56, 57, 58), TEIȘANU S. (VII: 45*). TUDOR I. (VII: 56, 57), VASIESCU M. (VII: 56, 57).

Liceul Militar „N. Filipescu" Mânăstirea Dealu.

Clasa I-a: CRĂCIUNESCU I. N. (IV: 62*, 63*, 64*, 65*, 66*, 67*, 68*, V: 66*, 67*.

Clasa IV-a: FLORESCU V. (IV: 30*, 32*, 33*, 37*, 39*, 45, 46, 47, 48, 51, 54, 55, 57, 58, 61, 63, 64, 65, 66, 67, 68*. V: 34, 35, 36, 44, 56, 61, 63, 64, 66, 67, 69, 70. VI: 32, 35, 36, 44, 45, 46, 50, 51, 52*, 53*, 55, 64, 71*, 77, 78. VII: 43, 44 51, 57), MANOLESCU P. N. (IV: 33, 44, 46, 48, 51, 52, 53, 54, 57, 58, 61, 64, 65, 66, 67, 68*. V: 37, 38, 50*, 51, 59, 66, 67. VI: 52*, 54), POSTELNICESCU S. (IV: 44, 45, 46, 48, 51, 53, 63, 64, 65, 66, 67. V: 67. VI: 54), RĂDULESCU O. (IV: 51, 52*, 53, 54, 57, 58, 63, 64, 65, 66, 67, 68*. V: 50*, 51, 56*, 58*, 59*, 65, 66*, 67, 68, 69, 70. VI: 71*, 78. VII: 51, 56, 57).

Clasa V-a: BELLOIU D. (V: 36. VI: 44, 45, 51, 52*, 56*). CONSTANTINESCU A. (V: 38*, 56*, 57, 58*, 59*), DOBRE T. (VI: 52*, 53*), LĂZĂRESCU D. ST. (V: 34, 42, 56. VI: 44, 45, 52*, 53*), ȘTEFĂNESCU C. (V: 34, 42, 50*, 57*. VI: 44, 45, 52*, 53*, 56*).

Clasa VI-a: MARINESCU E. (VI: 57), MOSCU T. (VI: 39, 44, 50, 52*, 53*, 57*, 61*, 62*, 63*, 65*. VII: 44), MUȘAT A. G. (VI: 44, 45, 50, 52*, 57*, 66).

Clasa VII-a: LĂZĂROIU R. (VII: 49, 66, 57).

Liceul Militar Iași.

Clasa IV-a: JIPA A. (IV: 44, 45, 46, 48, 51, 52, 53, 54, 58, 64, 65, 66, 67, 68*).

Clasa VI-a: BOGDAN I. (VII: 38), BUCUR V. (VI: 71. VII: 63*, 64*), CĂLIN D. (VII: 38), ISAC D. (VI: 50).

Liceul Militar „Mihai Viteazul" Tg.-Mureș.

Clasa II-a: DIMITRIU V. (IV: 64, 67, 68), IOSIF T. (IV: 64, 66, 67, 68*), VASILIU D. (VI: 64, 65, 66).

Clasa III-a: ANDREESCU C. (IV: 65, 66, 67), AVRAM I. (IV: 65), AVRAM T. (IV: 67), BRÂNZEI D. (IV: 65, 66, 68*), COSTEA D. (IV: 65, 66, 67), FILIPESCU G. (IV: 66), MANU I. (IV: 65, 66), MILITARU A. (IV: 65, 66, 67, 68*), MIRONESCU D. (IV: 64, 65, 66, 68*), MODREANU B. (IV: 65), MOISIU I. (IV: 65), NEGULESCU V. (IV: 68*), ONOFRIESEI M. (IV: 65), OPRESCU I. (IV: 65, 66, 67, 68*), PÂRLOAGĂ D. (IV: 65, 66, 67), POPESCU I. (IV: 65, 66), RADU E. (IV: 65, 66, 68*), STĂNESCU D. (IV: 65, 67), SUTEU I. (IV: 65, 67), VARTIC I. (IV: 65, 66), VOICULESCU G. (IV: 68*), ZEVELEANU G. (IV: 65).

Clasa IV-a: BĂLCĂCEANU I. (IV: 65), BEJENARU V. (IV: 47, 54, VI: 52*, 53*, VII: 44), DIMITRIU P. (IV: 51, 52, 53, 64, 66, 68*), DUMITRESCU M. (IV: 51, 52, 53, 55, 56, 57, 61, 64, 67, 68*), DOBRESCU G. (IV: 64*). ELIAN D. V. (IV: 44), ENĂCHESCU M. (IV: 64), FILIPESCU G. (IV: 65), IACOB S. (IV: 45, 51, 54, 57, 61, 64, 68*), OANȚĂ FL. (IV: 64, 66, 67), PASERE E. (IV: 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58. V: 50*. VI: 52*), PETCOVICI I. (IV: 67) POP A. (IV: 44, 45, 46, 61), SĂNDULESCU J. (IV: 51. V: 50), SĂNDULESCU C. (IV: 51, 52, 53, 64, 65, 67*), ȘTEFĂNESCU N. A. (IV: 44, 48), STRATILAT D. (IV; 45), TĂTARU N. (IV: 34, 45, 46, 48, 51, 52. V: 46, 47. VI: 52*), VASILESCU I. Ș. (IV: 51, 52).

Clasa V-a: BĂDESCU F. I. (V: 31), BALINSCHI G. (V: 46, 47, 57*, 58, 59), BANCIU P. C. (V: 69, 70), BOBORODEA I. (V: 50, 63), CAPOTA G. (V: 58), DĂLBAN G. (V: 66, 69*), HUREZEANU C. (V: 46, 63, 66, 69*, 70*. VI: 52*), ISAC V. (V: 50. VI: 45, 46), MATEI V. (V: 30, 50*), MOSORA N. (V: 46, 50*, 66), SECHEL M. (V: 71*), TOFAN T. (V: 58*), TOMA N. (V: 47*, 50*, 56*, 66), VULCAN C. (V: 66), VLAICU V. A. (V: 63).

Clasa VI-a: BUCURENCIU V. (VI: 60*), STOIAN S. I. (VI: 65).

Clasa VII-a: CRIȘAN T. I. (VII: 31, 32, 33, 34, 36), STOICA N. D. (VII: 40).

Elevi Particulari.

Clasa IV-a: TARASIUC I. ST. (IV: 51, 52, 53, 54, 57, 59).

Clasa V-a: GRIGORESCU TRAIAN (V: 57, 59*).

Liceul „Banatia" Timișoara.

Clasa VII-a: MÜLLER IOSIF (VII: 43, 47*).

EXERCIȚII PROPUSE PENTRU VACANȚĂ

Clasa IV-a. *Exerc. 73.* Un *arab* murind lasă moștenire, celor trei fii ai săi, mai multe cămile, cerându-le să le împartă în modul următor: *cel mare* să ia o jumătate, *al doilea* o treime, iar *al treilea* a noua parte din cămile.

După moartea lui, cei trei fii observă că tatăl lor se înșelase în socotelile sale și că nu pot face împărțirea. Se adresează atunci unui *om înțelept* ca să-i descurce. Acesta adaogă cămila sa la grupul lor de cămile, face împărțirea cerută de testament, dând fiecăruia partea cuvenită, din noul grup de cămile, și mai rămâne cu cămila sa. Câte cămile a avut bătrânul *arab?*

N. B.

IV. 74. Intr'un război s'a întrebuințat următorul alfabet cifrat. S'a făcut să corespundă literelor alfabetului *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z* numerele dela *1* la *26.*

S'a atașat apoi fiecărui număr X un altul Y, astfel că:

$$Y = \frac{5X + 2}{6}$$

și s'a reprezentat cu acest număr Y litera căreia îi corespundea numărul X. Să se descifreze cuvintele:

$$\left|\frac{37}{6}\ \frac{7}{7}\ 22\ \frac{9}{2}\ \frac{51}{3}\ \frac{14}{12}\right|\frac{67}{6}\ \frac{21}{18}\ \frac{102}{6}\ \frac{18}{4}\ \frac{134}{12}\ \frac{35}{30}\ \frac{153}{9}\ \frac{47}{6}\ \frac{17}{6}\ \frac{49}{12}\left|\frac{77}{66}\right|$$

$$\frac{235}{30}\ \frac{201}{18}\ \frac{41}{3}\ \frac{31}{3}\ \frac{94}{12}\ 12\ \frac{141}{18}\ \frac{255}{15}\left|\frac{82}{6}\ \frac{91}{78}\ \frac{357}{21}\ \frac{46}{3}\ \frac{107}{6}\ \frac{44}{2}\ \frac{27}{6}\ \frac{34}{12}\ \frac{329}{42}\right|$$

$$\frac{11}{3}\ \frac{45}{10}\left|\frac{119}{102}\ \frac{24}{2}\ \frac{517}{66}\right|.$$

N. B.

IV. 75. Se consideră o sferă reprezentată prin cercul său mare O și un diametru al său PP' așezat în planul cercului O. Se consideră cilindrul, circumscris sferei, cu PP' ca direcțiune a generatoarelor, tangent sferei după cercul de diametru EE'.

Fie $\overline{BEC}$ şi $\overline{B'E'C'}$ generatoarele cilindrului aşezate în planul cercului O. Să prelungim pe $\overline{EE'}$ cu $\overline{EA}$ egal cu raza sferei. Dreapta AB' tae pe BC în F. Prin F ducem un plan de secţiune S perpendicular pe PP'. Cercurile de secţiune din cilindru şi sferă determină în planul S o coroană de cerc.

1°. Să se afle: aria acestei coroane;

2°. Volumul conului scobit având ca bază coroana de cerc şi vârful în punctul P;

3°. Volumul solidului cuprins între planul S, planul cercului EE' de tangenţă, cilindru şi sferă. Valoarea numerică când

$$R = 10^n - 1.$$

O. N. Ţ.

IV. 76. Am cumpărat astăzi un sfert de nucă şi trei sferturi din numărul nucilor cumpărate eri, şi întrebuinţând eri o jumătate de nucă şi o jumătate din numărul nucilor folosite astăzi, mâine nu voiu mai avea nuci.

Dacă aş fi cumpărat astăzi trei sferturi de nucă şi un sfert din numărul nucilor cumpărate eri, ar fi trebuit să folosesc eri numai o cincime din numărul celor folosite eri, pentru ca astăzi să întrebuinţez atâtea câte am întrebuinţat.

Câte nuci am cumpărat şi câte am întrebuinţat în fiecare din cele două zile?

C. I. B.

IV. 77. O fabrică are 4 automobile. Primul automobil transportă zilnic 1230 kg. mai mult decât al doilea şi al treilea împreună, al doilea automobil transportă zilnic 1230 kg. mai puţin decât al treilea şi al patrulea împreună, iar al patrulea automobil transportă $\frac{6}{7}$ din aceea ce transportă al treilea automobil.

Ele încep deodată transportul a 725,4 tone de produse. Primul automobil se strică după 10 zile, al doilea şi al treilea după alte 10 zile dela stricarea acestuia.

Pentru transportul restului de fabricate, automobilul rămas întrebuinţează 5 zile. Cât a transportat zilnic fiecare automobil?

C. I. B.

Clasa V-a. *Exerc. 84.* Să se verifice identitățile :

$$[a(xu+yv)+b(yu-xv)][a(xu-yv)+b(yu+xv)]$$
$$+[a(yu+xv)-b(xu-yv)][a(yu-xv)-b(xu+xv)]$$
$$\equiv(axu+byv)(axu-byv)+(bxu+ayv)(bxu-ayv)$$
$$+(ayu+bxv)(ayu-bxv)+(byu+axv)(byu-axv)$$
$$\equiv(a^2+b^2)(x^2+y^2)(u^2-v^2).$$

N. B.

V. 85. Cunoscându-se laturile B, *b*, *l*, *m* ale unui trapez, să se găsească valoarea înălțimii.

N. B.

V. 86. Se dau patru lungimi B, *b*, *l*, *m*. Să se construiască un trapez ale cărui laturi să aibă aceste lungimi, B fiind baza mare, *b* baza mică. Discuție.

N. B.

V. 87. Să se rezolve ecuația :

$$(a+1)(a^3-1)(x^2+1)+(a-1)(a^3-1)(x^2-1)$$
$$=(a^2-1)(a^3+1)(x+1)+(a^2+1)(a^3+1)(x-1).$$

N. B.

V. 88. Să se rezolve ecuația :

$$(a^3-1)x^2+a(a^3+1)x+2a^2=0.$$

N. B.

V. 89. Să se rezolve sistemul :

$$(b-c)(b-1)(c-1)x+(c-a)(c-1)(a-1)y+(a-b)(a-1)(b-1)z$$
$$=c(a-b)(b-1)(x-1)+a(b-c)(c-1)(y-1)-b(c-a)(a-1)(z-1)$$
$$=b(c-a)(c-1)(x-1)+c(a-b)(a-1)(y-1)+a(b-c)(b-1)(z-1)$$
$$=(a-b)(b-c)(c-a).$$

N. B.

V. 90. Se consideră un trapez dreptunghiu ABCD, în care AB şi CD sunt bazele, iar latura AD este perpendiculară pe baze. Se ia un punct oarecare L în plan. Latura AD este întâlnită de dreapta LB în M şi de dreapta LC în N.

Fie P mijlocul segmentului $\overline{BM}$ şi Q mijlocul segmentului $\overline{CN}$. Dreptele AP şi DQ se întâlnesc în R. Să se arate că triunghiurile ADR şi LMN sunt asemenea.

N. B.

V. 91. Să se rezolve ecuaţiunea

$$\frac{x^2 - ax + b}{x^2 - bx + a} = \frac{x^2 + bx - a}{x^2 + ax - b}$$

şi să se determine condiţiunea în care ecuaţiunea admite numai rădăcini reale.

C. I. B.

V. 92. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{c}$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c.$$

C. I. B.

V. 93. Un trapez dreptunghiular ABCD are bazele $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ respectiv egale cu 5 şi 8, iar latura $\overline{AD}$, perpendiculară pe cele două baze, de 4.

Să se arate că bisectoarea unghiului ABC trece prin mijlocul diagonalei $\overline{AC}$.

C. I. B.

V. 94. Să se rezolve sistemul:

$$5x + 3y - 8 = 0\,,\quad 25x^2 + 10x - 9x^2 + 1 = 0.$$

C. I. B.

V. 95. Un triunghiu ABC are $\overline{AB} = 2$, $\overline{BC} = 4$ şi unghiul B de 60^0. Să se arate că: aria ABC $= 2\sqrt{3}$.

C. I. B.

V. 96. Intre ce limite trebuie să fie cuprins raportul $\frac{b}{a}$ pentru ca ecuaţiunea reciprocă:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$$

să aibă toate rădăcinile reale?

G. D. S.

V. 97 Se dă ecuaţiunea reciprocă de gradul al IV-lea

$$x^4 - (m + 1)\, x^3 + 2mx^2 - (m + 1)\, x + 1 = 0.$$

1^0. Să se rezolve; 2^0. Să se determine valorile lui m pentru care toate rădăcinile sunt reale.

G. D. S.

V. 98. Pe segmentul $\overline{AB}$ se ia un punct fix D. Se construeşte segmentul de cerc AMB capabil de unghiul α, iar din D se duce o dreaptă ce face cu AB unghiul α şi care întâlneşte segmentul de cerc în M. Care este locul geometric al lui M când unghiul α variază?

G. D. S.

V. 99. Dacă avem $a + b + c = d$ atunci produsul sumei fracţiunilor

$$\frac{a-b}{c-d}\,,\quad \frac{b-c+d}{a}\,,\quad \frac{c-d-a}{b}$$

prin suma inverselor lor este egal cu 9.

I. L.

Clasa VI-a. *Exerc. 86.* Să se verifice identitatea:

$$\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{\sin^2 2a}{2}$$

A. A. R.

VI. 87. Să se verifice identitatea

$$\cos^4 a - \sin^4 a = 1 - 2\sin^2 a.$$

A. A. R.

VI. 88. Să se arate că între elementele unui triunghiu ABC avem relaţia:

$$\frac{a}{\cos A} = \frac{b\cos B + c\cos C}{1 - \cos^2 B - \cos^2 C}$$

notaţiunile fiind cele obişnuite.

N. B.

VI. 89. a, b, c fiind laturile unui triunghiu ABC să se demonstreze relaţiunea:

$$a^3\cos B\cos C + b^3\cos C\cos A + c^3\cos A\cos B = abc(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C).$$

N. B.

VI. 90. Să se verifice identitatea

$$\frac{3 + \cos 4a - 4\cos 2a}{3 + \cos 4a + 4\cos 2a} = \operatorname{tg}^4 a.$$

C. I. B.

VI. 91. Într'un triunghiu ABC, înălţimea şi mediana vârfului A au respectiv valorile h_a şi m_a. Cunoscându-se şi unghiul C, să se rezolve triunghiul.

Aplicaţie $C = 45^0$, $h_a = \sqrt{3}$, $m_a = 2$.

C. I. B.

VI. 92. Laturile şi unghiurile unui triunghiu ABC fiind notate în mod obişnuit, iar h_a şi m_a înălţimea şi mediana corespunzătoare laturii BC, să se stabilească relaţia

$$a^2 + h_a^2 - m_a^2 = 4b\cos C(b\cos C - a).$$

C. I. B.

Clasa VII-a. *Exerc. 68.* Să se demonstreze că punctele A (2, 1, 3), B (3, 2, 3), C (1, 4, 3), D (5, 4, 0) ale unei epure, nu sunt în acelaş plan.

C. I. B.

VII. 69. Să se demonstreze că punctele unei epure A (2, 1, 3), B (4, 3, 3), C (3, 3, 2), D (5, 5, 2) sunt în acelaş plan.

C. I. B.

VII. 70. Să se demonstreze că punctele A (2, 1, 3), B (3, 2, 3) C (4, 3, 3), D (5, 3, 0) ale unei epure sunt în acelaş plan.

C. I. B.

VII. 71. Să se demonstreze că linia poligonală ABCDE, pentru care în epură A (2, 1, 3); B (3, 2, 3); C (4, 2, 2); D (5, 1, 2); E (6, 1, 3) este formată din segmente egale.

C. I. B.

VII. 72. Să se studieze variaţia funcţiei:

$$y = (x+2)\sqrt{\frac{x+1}{x+3}}.$$

N. B.

VII. 73. La o petrecere se află patru băeţi şi trei fete, care se hotărăsc să danseze, unul din băeţi rămânând să îngrijească de patefon. In câte moduri se pot aranja perechile pentru dans.

N. B.

VII. 74. După dans, cei şapte tineri din exerciţiul precedent se aşează pe şapte scaune ce se află dealungul unui perete, la extremităţi aşezându-se câte un băiat, ceilalţi fiind aşezaţi astfel ca fiecare fată să se găsească între doi băeţi. Câte aşezări distincte se pot forma? In câte din aceste aşezări un anumit băiat din cei patru se poate găsi lângă o anumită fată din cele trei?.

N. B.

VII. 75. Să se arate că numerele:

94090194001; 960401960001;

9940090199400001; 9960040199600001

sunt pătrate perfect.

N. B.

VII. 76. Se consideră funcțiunile:

$$f(x) = \cos^4 x\,(\cos^4 x + 2\,\sin^4 x)$$

$$\varphi(x) = \sin^2 x\,(\sin^6 x - 2\,\sin^4 x - 2\,\cos^2 x).$$

1°. Să se arate că $f'(x) = \varphi'(x)$

2°. Să se deducă de aci că

$$f(x) = \varphi(x) + C$$

și să se determine valoarea constantei C, făcând $x = 0$ în această egalitate.

N. B.

CU ACEST NUMĂR SE ÎNCHEIE ANUL I AL „SUPLIMENTULUI CU EXERCIȚII AL GAZETEI MATEMATICE“

Primul număr din anul II va apare la 1 Octomvrie 1935

COSTUL ABONAMENTULUI ESTE DE 50 LEI

și se trimite pe adresa:

Lt.-Comandor GR. ZAPAN

CASA „GAZETA MATEMATICĂ“ CALEA GRIVIȚEI 158

București 2

Până la 1 Septemvrie se mai primesc, dela abonați, soluțiuni la exercițiile propuse în numerele 7, 8 și 9.

Soluțiile neiscălite nu s'au luat în considerare.